Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 11 , Abgabe: 16.1.2006 , 11.00 Uhr

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Seien folgende Stützstellen und Stützwerte gegeben

i	x_i	y_i
0	-1	-1
1	0	3
2	2	11
3	3	27

Sei p_{0123} das zugehörige Interpolationspolynom vom Grad 3.

(a) Berechnen Sie $p_{0123}(x)$ durch die Methode von Lagrange.

(b) Berechnen Sie $p_{0123}(x)$ durch die Methode von Newton.

(c) Berechnen Sie $p_{0123}(1)$ durch die Methode von Neville.

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Die Tschebyscheff–Polynome sind für $n \geq 0$ definiert durch

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x).$$

a) Zeigen Sie für $n \geq 1$:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

b) $2^{-n}T_{n+1}(x)$ ist für $n \geq 0$ Polynom vom Grade $n+1$ mit Höchstkoeffizient 1.
c) T_n sind orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, d.h.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) \mathrm{dx} = 0 \ (m \neq n).$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)
a) Seien $x_0, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und $n_0, \ldots, n_m$ ganze Zahlen > 0. Sei $n = n_0 + \ldots + n_m$.

Zeigen Sie: Sind y_{jk}, $0 \leq k < n_j$, $j = 0, \ldots, m$ beliebige komplexe Zahlen, so gibt es genau ein Polynom p vom Grade $\leq n-1$ mit

$$p^{(k)}(x_j) = y_{jk} , \qquad 0 \leq k < n_j , \quad j = 0, \ldots, m .$$

b) Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $y_0, \ldots, y_n$ zugehörige Stützwerte.

Zeigen Sie: Ist $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ irgend eine Permutation der Zahlen $0, \ldots, n$, so ist

$$[y_0, \ldots, y_n] = [y_{\sigma_0}, \ldots, y_{\sigma_n}] .$$

Aufgabe 40: (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm, das das Interpolationspolynom zu gegebenen Stützstellen und Stützwerten berechnet. Testen Sie Ihr Programm am Runge–Beispiel mit $n = 5, 10, 20$ Stützstellen. Wählen Sie die Stützstellen zunächst äquidistant, dann als Nullstellen der Tschebyscheff–Polynome. Plotten Sie das Ergebnis.