Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Mathematik

Übungsblatt 10 , Abgabe: 9.1.2006 , 11.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei A_k eine Folge von invertierbaren Matrizen mit $A_k \mapsto A$ und $A, A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Sei $A_k = Q_k R_k$ die QR-Zerlegung von A_k mit $\mathrm{diag}(R_k) > 0$. Zeigen Sie: Dann gilt $Q_k \mapsto Q$ und $R_k \mapsto R$ für eine unitäre Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R sowie $A = QR$.

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Sei $H = (h_{ij})$ eine Hessenbergmatrix und $H = QR$, $R = (r_{ij})$, ihre QR-Zerlegung. Zeigen Sie: $|r_{ii}| \geq |h_{i+1,i}|$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Aufgabe 35: (4 Punkte)

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ 13.5 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 29 & -16 & -8 \\ 28.25 & -14 & -9 \\ 30.25 & -19 & -6 \end{pmatrix}$$

haben beide den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

a) Berechnen Sie nach der Potenzmethode für beide Matrizen Approximationen x_A, λ_A bzw. x_B, λ_B für λ_1 und einen dazugehörigen Eigenvektor x_1, so daß für die Defekte

$$\begin{aligned} d_A &= Ax_A - \lambda_A x_A \quad , \quad d_B = Bx_B - \lambda_B x_B \qquad \text{gilt :} \\ \varepsilon_A &= \frac{\|d_A\|}{\|x_A\|_2} \leq 0.1 \quad , \quad \varepsilon_B = \frac{\|d_B\|_2}{\|x_B\|_2} \leq 0.1 \qquad . \end{aligned}$$

b) Vergleichen Sie die Verhältnisse

$$|\lambda_1 - \lambda_A|/\varepsilon_A \quad , \quad |\lambda_1 - \lambda_B|/\varepsilon_B$$

und erklären Sie das Resultat.

Aufgabe 36: (4 Punkte)
(a) Was kann man durch Anwendung des Satzes von Gerschgorin über die Lage der Eigenwerte der folgenden Matrix sagen? Wenden Sie den Satz auf A und A^t an.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(b) Sei $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grade n und sei $P(\lambda_0) = 0$. Zeigen Sie:

$$|\lambda_0| \leq \max_{i=0,\ldots,n-1} |a_i| + 1 \ .$$