

Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 1, Abgabe 27. 10. 2016

Aufgabe 1 (4 Punkte). In der Vorlesung haben Sie die semidiskrete Fourier-Transformation behandelt: Für eine Gitterfunktion U , definiert auf $(\Delta x)\mathbb{Z}$, wurde

$$\hat{u} : \left[-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}\right] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{u}(k) = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j e^{-ikx_j}$$

gesetzt. Dabei war $x_j = j\Delta x$. Beweisen Sie folgende Identitäten:

1. **Parseval-Gleichung:**

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|U\|_{l^2}$$

2. **Faltungssatz:** Wir definieren die Faltung $v * w$ von zwei Gitterfunktionen v und w durch

$$(v * w)_m = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_{m-j} w_j = \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j w_{m-j}$$

Beweisen Sie die Gültigkeit der Aussage: Für $u \in \ell_{\Delta x}^2$ und $v \in \ell_{\Delta x}^1$ ist $u * v \in \ell_{\Delta x}^2$ und es gilt

$$\widehat{u * v}(\xi) = \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). In der Vorlesung wurde das θ -Verfahren für die 1D-Wärmeleitungsgleichung eingeführt. Betrachtet wird die Anwendung dieses Verfahrens auf das Problem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= f(x, t), & t > 0, x \in [0, L] \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned}$$

Führen Sie eine ℓ^2 Stabilitätsanalyse für das θ -Verfahren in Abhängigkeit der Parameter $\theta, \Delta x, \Delta t$ durch, d.h., leiten Sie - in Abhängigkeit von θ - Bedingungen an Δx und Δt her, unter denen Sie ein ℓ^2 stabiles Verfahren erhalten.