Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 9, Abgabe bis 22.12.2006, 12 Uhr

1. Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a\nabla u) + b\nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega \\ (a\nabla u)n &= g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned}$$

   unter den Voraussetzungen dass

   (a) $a,\ b,\ c \in L^\infty(\Omega)$

   (b) $a(x) \geq \|b\|$

   (c) $c(x) \geq \frac{\|b\|}{2}$

   Zeigen sie dass die durch die obige Differentialgleichung definierte Bilinearform beschränkt und koerziv ist.

2. Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} u''''(x) &= f(x) && x \in (0,1) \\ u(x) &= 0 && x \in \{0,1\} \\ \partial_x u &= 0 && x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

   Zeigen sie für Existenz und Eindeutigkeit für die schwache Formulierung. Verwenden sie den Sobolevschen Normäquivalenzsatz.

3. Jeder symmetrischen reellen $n \times n$ Matrix $\underline{B}$ läst sich durch

$$B(u,v) = (\underline{B}u, v)$$

   eindeutig eine symmetrische Bilinearform B auf $\mathbb{R}^n$ zuordnen. Dabei bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ das Euklidische Skalarprodukt, die dazugehörige Norm wird mit $\|\cdot\|$ bezeichnet. Die kleinstmögliche Schranke μ_2 die die Bedingung

$$|B(u,v)| \leq \mu_2 \|u\|\|v\| \quad \text{für all } u,v \in \mathbb{R}$$

   erfüllt ist durch die Größe

$$\sup_{w\neq 0} \sup_{v\neq 0} \frac{B(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$

   gegeben. Zeigen Sie dass gilt

$$\sup_{w\neq 0} \sup_{v\neq 0} \frac{B(u,v)}{\|u\|\|v\|} = \lambda_{max}(\underline{B})$$

   wobei $\lambda_{max}(\underline{B})$ der größte Eigenwert ist.
   Hinweis: Verwenden sie ohne Beweis - jede Matrix $\underline{B}$ lässt sich folgendermaßen darstellen $\underline{B} = U\Sigma U^T$ mit orthogonalen Matrizen U und V und einer Diagonalmatrix Σ. Ersetzen sie im obigen Ausdruck u durch $U\tilde{u}$ und v durch $U\tilde{v}$ und beachten sie, dass $\|w\| = \|\tilde{w}\|$ und $\|v\| = \|\tilde{v}\|$.