Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 8, Abgabe bis 15.12.2006, 12 Uhr

1. *Distributionelle Ableitung*
   Berechnen sie die distributionelle Ableitung von

   (a)

   $$u(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 0.5] \\ 1 - x & x \in (0.5, 1) \end{cases}$$

   (b)

   $$u(x) = \begin{cases} x & x \in (0, 1] \\ 1 & x \in (1, 2) \end{cases}$$

2. *Quadratische Ansatzfunktionen I*
   Gegeben seien die Knoten $x_i,\ i = 0, 2, 4, \dots 2N$ mit

   $$0 = x_0 < x_2 < x_4 \dots < x_{2N} = 1$$

   die eine Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ in die Elemente $T = (x_{2k-2}, x_{2k})$ mit $k = 1, 2, \dots N$ definieren. Konstruieren sie eine Knotenbasis für den Raum der stückweise quadratischen Funktionen. Verwenden sie die Mittelpunkte der Elemente

   $$x_{2i-1} = \frac{1}{2}(x_{2i-2} + x_{2i}) \quad i = 1, 2, \dots N$$

   als weitere Knoten. Betrachten sie die Funktionen φ_i, $i = 0, 1, \dots 2N$ mit der Eigenschaft

   $$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

   Bestimmen sie den Träger dieser Basisfunktionen und schließen sie auf die Besetzheitsstruktur der Steifigkeitsmatrix

   $$K = \int_\Omega \varphi_j' \varphi_i'.$$

3. *Quadratische Ansatzfunktionen II*
   Es gelten die Bezeichnungen des vorherigen Beispiels. Bestimmen sie die Formfunktionen auf dem Referenzelement $\hat{T} = [0, 1]$. Bestimmen sie für ein äquidistantes Gitter die Steifigkeitsmatrix.

4. *Numerische Lösung der Laplace Gleichung*
   Wir betrachten das Übungbeispiel 4 von Zettel 7. Lösen sie die Gleichung numerisch auf einem äquidistanten Gitter mit stückweise quadratischen Ansatzfunktionen. Vergleichen Sie ihre Lösungen für stückweise lineare und stüeckweise quadratische Ansatzfunktionen für die rechten Seiten $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $f(x) = \frac{1}{e^{x^2}-1}$.