Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 7, Abgabe bis 8.12.2006, 12 Uhr

1. Wir betrachten die biharmonische Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta\Delta u &= f(x) && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && x \in \Gamma \\ \partial_n u &= 0 && x \in \Gamma. \end{aligned}$$

   Bestimmen sie eine Variationsformulierung.

2. Die so genannte Massenmatrix ist durch

$$M = \int_\Omega \varphi_i \ \varphi_j dx$$

   gegeben.
   Berechnen sie für die Wahl

   (a) stückweise linearer Ansatzfunktionen

$$\varphi_j = \begin{cases} \frac{1}{h}\left(x - x_{j-1}\right) & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{1}{h}\left(x_{j+1} - x\right) & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

   mit $j = 1, \dots n$.

   (b) Monome

$$\varphi_j = x^j$$

   die Massenmatrix auf dem Intervall $[0, 1]$. Vergleichen Sie die Konditionszahlen der beiden Matrizen für $h = 0.1$ mithilfe ihres Matlab Programs.

3. Man zeige dass die Integrationsformel

$$\int_T f\left(x, y\right) dxdy \approx \frac{1}{2} f\left(x^*, y^*\right)$$

   mit $x^* = y^* = \frac{1}{3}$ für alle linearen Funktionen $f = ax + by + c$ exakt ist. T bezeichnet das Einheitsdreieck (Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$).

4. Wir betrachten die PDE

$$\begin{aligned} -u''(x) &= x^2 \quad x \in [0, 1] \\ u(0) &= 0 \\ -u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

   Lösen sie das Problem numerisch mit einer Finiten Elemente Methode. Verwenden sie ein äquidistantes Gitter und stückweise lineare Ansatzfunktionen. Vergleichen sie ihre numerische Lösung mit der exakten Lösung für verschiedene Werte von h.