Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 6, Abgabe bis 1.12.2006, 12 Uhr

1. *M-Matrizen:*
   Sei K eine M-Matrix (der Dimension $n \times n$) und $w \in \mathbb{R}^n$ mit $Kw \geq e$, mit $e = (1, 1, \dots 1)^T$. Zeigen Sie
   $$\|K^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty.$$

2. *Linearisierung:*
   Seien X und Y normierte Räume, $U \subset X$ offen und $F : U \to Y$ eine Abbildung. Die Richtungsableitung eines Operators F ist dann durch
   $$F'(u)h = \lim_{t \to 0} \frac{F(u + th) - F(u)}{t} \qquad \forall h \in X$$
   gegeben. $F'(u)'$ ist also ein linearer Operator auf h.
   Berechnen sie die Richtungsableitung und den linearen Operator $F'(u)$ für
   (a) einen linearen Operator $F(u) = Lu$
   (b) $F(u) = \sum_i \alpha_i u^i$
   (c) $F(u) = \partial_x (\alpha(u)\partial_x u)$.

3. *Nichtlineare PDEs - Newton Verfahren:*
   Wir betrachten die nichtlineare Gleichung
   $$\begin{aligned} -\Delta u + u(u^2 - 1) &= 1 \qquad \text{in } [0, 1] \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0.5 \end{aligned}$$
   Diese kann auch als Operatorgleichung $F(u) = 0$ mit
   $$F : u \to \begin{pmatrix} -\Delta u + u^2(u-1) - 1 \\ u(0) \\ u(1) - 0.5 \end{pmatrix}$$
   geschrieben werden. Eine bekannte Methode zur Lösung solcher Gleichungen ist das gedämpfte Newton Verfahren:
   $$u^{n+1} = u^n - \tau F'(u^n)^{-1} F(u^n)$$
   mit $\tau \in (0, 1]$. Stellen sie das Iterationsverfahren für das gedämpfte Newton Verfahren auf (verwenden sie finite Differenzen).

4. Lösen Sie die Gleichung in Beispiel 3 mit dem gedämpften Newton Verfahren. Sie können dazu Ihr Programm vom Übungszettel 1 Beispiel 4 verwenden, wenn Sie es etwas verändern.
   Betrachten sie für verschiedene Werte von τ das Konvergenzverhalten und die Anzahl an Iterationen.