Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 5, Abgabe bis 24.11.2006, 12 Uhr

1. *Schwaches Maximumprinzip für parabolische Differentialgleichungen*
   Wir betrachten die parabolische Gleichung

   $$Lu = -\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x,t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x,t)$$

   unter den Voraussetzungen dass

   - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend
   - $D := \Omega \times \,]0,T]\,,\ \Sigma := (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\})$
   - alle Funktionen stetig sind und $A = (a_{ij})_{1\leq i,j \leq n}$ auf $\bar{D}$ positiv definit ist.

   Unter diesen Voraussetzungen gilt:
   Löst u die obige Differentialgleichung und ist $f > 0$, so nimmt u sein Maximum auf Σ an.

   Hinweis: Verwenden Sie, dass für $c = 0$ u nur eine Lösung auf ∂D annehmen kann. Da $\partial\Omega = \Sigma \cup (\Omega \times \{T\})$, verbleibt zu zeigen dass das Maximum nicht auf $\Omega \times \{T\}$ sein kann (Widerspruchsbeweis).

2. Sei u die Lösung der Gleichung

   $$\begin{aligned} \Delta u - u(u^2 - 1) &= 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= 0.5 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie dass

   - $u \in \,]-1,1[$ in ganz Ω gilt
   - und die Werte 1 und -1 nicht angenommen werden können.

3. Wir betrachten die stationäre viskose Approximation der Transportgleichung (vergleiche Übungszettel 3).

   $$\begin{aligned} -\varepsilon\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad \text{in } (0,1) \\ u(0) &= 1 \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

   mit $\varepsilon > 0$. Lösen Sie die Aufgabe numerisch mittels der Finiten Differenzen Methode und ersetzen Sie jeweils die erste Ableitung durch den rückwärtigen, vorwärtigen und den zentralen Differenzenquotienten.
   Überprüfen Sie für alle drei Verfahren ob die Systemmatrix eine M-Matrix ist und vergleichen Sie die Lösungen für $\varepsilon = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$.