Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 4, Abgabe bis 17.11.2006, 12 Uhr

1. Zeigen Sie die *Poincare Ungleichung* in 1D: Es gibt eine Konstante $C_P > 0$ mit

$$\int_0^1 v(x)^2\, dx \leq c_P^2 \left[\left(\int_0^1 v(x) dx \right)^2 + \int_0^1 v'(x)^2 dx \right] \quad \text{für alle } v \in C^1[0,1]$$

   Hinweis: Verwenden Sie, dass $v(y) = v(x) + \int_x^y v'(z)dz$.

2. *Finite-Differenzen-Methode:*
   Sei $u_h(x)$ die Näherungslösung der gesuchten Funktion u in den Gitterpunkten x. Bei der Diskretisierung der Differentialgleichung treten nur Näherungen in einigen wenigen benachbarten Gitterpunkten auf. Diese Gitterpunkte fasst man zu dem so genannten Differenzenstern $S_h(x)$ zusammen.
   Jedes lineare Randwertproblem kann als Differenzialgleichung der Form

$$\sum_{\xi \in S_h(x)} k_h(x,\xi) u_h(\xi) = f_h(x) \quad x \in G_h \cup \Gamma_h$$
$$u_h(x) = g_D(x) \quad x \in \Gamma_{Dh}$$

   geschrieben werden.
   Eine Finite-Differenzen-Methode heißt monoton falls

   (a) $k_h(x,x) > 0$ für alle $x \in G_h \cup \Gamma_{Nh}$
   (b) $k_h(x,\xi) < 0$ für alle $x \in G_h \cup \Gamma_{Nh}$ und alle $\xi \in S_h(x)$ mit $\xi \neq x$
   (c) $\sum_{\xi \in S_h(x)} k_h(x,\xi) \geq 0$ für alle $x \in G_h \cup \Gamma_{Nh}$.

   Betrachten wir die Differentialgleichung

$$-u''(x) + b(x)u'(x) = f(x).$$

   Zeigen Sie, dass man bei der Verwendung eines Upwind-Differenzenquotienten

$$b(x_i)u'(x_i) = \begin{cases} b(x_i)\frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}) & \text{für } b(x_i) > 0 \\ b(x_i)\frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) & \text{für } b(x_i) \leq 0 \end{cases}$$

   stets ein monotones Differenzenschema erhält.

3. Wir betrachten die eindimensionale *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x \in (0,1),\ t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in (0,1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x.0) = 0 \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad t > 0.$$

Für die Diskretisierung verwenden Sie die regulären Gitter $x_i = \frac{i-1}{h}$ und $t_j = j\Delta t$. Lösen Sie die Gleichung numerisch, indem Sie die zweiten Ableitungen durch zentrale Differenzenquotienten ersetzen.
Vergleichen Sie die Lösung für verschiedene Werte der CFL Konstante, insbesonders die für $c = 1$, $c < 1$ und $c > 1$ und den Anfangswert

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.02x & \text{für } x \leq 0.75 \\ 0.006(1-x) & \text{für } x > 0.75 \end{cases}$$

und $\gamma \in \mathbb{R}^+$.