Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 3, Abgabe bis 10.11.2006, 12 Uhr

1. Betrachten sie die viskose Approximation der Transportgleichung ($\epsilon > 0$)

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial xx}, \qquad x \in (0,1), t \in (0,T)$$

   mit den Randbedingungen $u(0) = 1$ und $u(1) = 0$, sowie einer Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$, sodass $0 \leq u_0(x) \leq 1$. Zeigen sie ein Monotonieprinzip für die Lösung u^ϵ, d.h.

$$0 \leq u^\epsilon(x,t) \leq 1, \qquad (x,t) \in (0,1) \times (0,T).$$

   (Hinweis: zeigen sie zunächst ein Maximumprinzip für die von den Funktionen $u^\epsilon_{\pm\alpha} = u^\epsilon \pm \alpha e^{2x}$ erfüllten Gleichungen, leiten sie daraus obere bzw. untere Schranken für $u^\epsilon_{\pm\alpha}$ her, und betrachten sie den Grenzwert $\alpha \to 0$).

2. Betrachten sie die stationäre Version der Gleichung aus der letzten Aufgabe, d.h.

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial xx}, \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, u(1) = 0.$$

   Berechnen sie die exakte Lösung der Gleichung und betrachten sie den Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$. Was passiert im Grenzfall $\epsilon = 0$ mit den Randbedingungen ?

3. Betrachten sie die finite Differenzen-Diskretisierung der eindimensionalen elliptischen Gleichung aus Kapitel 1.1. Erzeugen sie die Matrix K_h als Funktion von $h = \frac{1}{n+1}$ mit dem Kommando *spdiags*. Berechnen sie den grössten und kleinsten Eigenwert von K_h sowie die Konditionszahl (Quotient aus diesen beiden Eigenwerten) als Funktion von h. Plotten sie diese drei Funktionen von h in einem geeigneten Intervall mit dem Kommando *semilogy* (selbe Syntax und Funktion wie plot, es wird aber die y-Achse logarithmisch dargestellt).