

Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2, Abgabe bis 3.11.2006, 12 Uhr

1. Betrachten sie das Vorwärts- und Rückwärts Euler Verfahren für die örtlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit finite Differenzen Diskretisierung wie im Skriptum. Zeigen sie folgendes diskrete Maximumprinzip:

$$\min U_{h,\tau}(t_k) \leq \min U_{h,\tau}(t_{k+1}) \leq \max U_{h,\tau}(t_{k+1}) \leq \max U_{h,\tau}(t_k),$$

wobei mit $\min U_{h,\tau}(t_k)$ bzw. $\max U_{h,\tau}(t_k)$ das minimale bzw. maximale Element des Vektors $U_{h,\tau}(t_k)$ bezeichnet ist.

2. Implementieren sie das Vorwärts-Euler Verfahren für die örtlich eindimensionale Wärmeleitungsgleichung wie im Skriptum. Testen sie das Verfahren mit den Anfangswerten $u_0(x) = \sin \pi x$ und $u_0(x) = \sin 6\pi x$, für verschiedene Gittergrößen $h = 0.01$ und $h = 0.001$. Wählen sie bei den Tests zunächst den Zeitschritt $\tau = 0.25h^2$ und erhöhen sie in kleinen Schritten bis zu $\tau = h^2$. Ab wann sind Instabilitäten sichtbar ?
3. Wir betrachten die Wärmleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in \Omega$$

mit der homogenen Neumann-Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$. Zeigen sie, dass die Lösungen dieser Gleichung folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i) Erhaltung des Mittelwerts: Für alle $t > 0$ gilt

$$\int_{\Omega} u(x, t) \, dx = \int_{\Omega} u_0(x) \, dx.$$

- (ii) Energiedissipation: Für alle $t > 0$ gilt

$$\int_{\Omega} u(x, t)^2 \, dx \leq \int_{\Omega} u_0(x)^2 \, dx.$$

- (iii) Abfall der Dissipationsrate: Für alle $t > 0$ gilt

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 \, dx.$$

- (iv) Entropiedissipation: Für alle $t > 0$ gilt

$$\int_{\Omega} (u(x, t) \log u(x, t) - u(x, t)) \, dx \leq \int_{\Omega} (u_0(x) \log u_0(x) - u_0(x)) \, dx.$$

4. Implementieren sie das Vorwärts-Euler Verfahren mit Upwind Schema für die örtlich eindimensionale Transportgleichung wie im Skriptum. Testen sie das Verfahren mit den Anfangswerten $u_0(x) = \sin \pi x$ und

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0.25 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für verschiedene Gittergrößen $h = 0.01$ und $h = 0.001$. Wählen sie bei den Tests zunächst den Zeitschritt $\tau = 0.5h$ und erhöhen sie in kleinen Schritten bis zu $\tau = 2h$. Ab wann sind Instabilitäten sichtbar? Vergleichen sie die numerische Lösung mit der exakten Lösung, die wir aus der Methode der Charakteristiken erhalten und interpretieren sie die Resultate für die beiden verschiedenen Anfangswerte.