Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 13, Abgabe 02.02.2007

1. Zeigen sie dass für $\Omega = (0,1)$, $u(x) = x^2$ und lineare Ansatzfunktionen $u_h(x)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\inf_{u_h} \int_0^1 |u' - u_h'|^2 dx = \frac{1}{3} h^2$$

wobei h die Länge der Intervalle der äqudistanten Gitters ist.

2. Wir betrachten das Anfangsproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f\left(t, u\left(z\right)\right) \\ u\left(0\right) &= u_0 \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung

$$\|f(t,w) - f(t,v)\| \leq L\|w - v\| \quad \text{für alle } t, v, w$$

Zeigen sie dass für hinreichend kleine Schrittweite $\tau > 0$ genau eine Lösung u_{j+1} der durch die implizite Euler Methode gegebenen Gleichung

$$u_{j+1} = u_j + \tau f\left(t_{j+1}, u_{j+1}\right)$$

gibt.
Hinweis: Verwenden sie den Banachschen Fixpunktsatz

3. Wir betrachten das linear Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t) - Ku(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung

$$(Kv, v) \geq 0 \quad \text{für alle } v.$$

Zeigen sie dass es für alle Schrittweiten $\tau > 0$ genau eine Näherung u_{j+1} der durch die implizite Euler Methode gegebenen Gleichung

$$u_{j+1} = u_j + \tau\left[f\left(t_{j+1}\right) - Ku_{j+1}\right]$$

gibt.
Hinweis: Zeigen sie dass $\left(\left(I + \tau K\right)v, \left(I + \tau K\right)v\right) > 0$ für alle $v \neq 0$.

4. *Programmierbeispiel Puffin*
Verändern sie die Programme HeatSolver.m und Heat.m so, dass sie eine explizite Euler Methode erhalten. Lösen sie damit das folgende Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + c(x)u + f && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \Gamma \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

für die Funktion $c_1(x) = 100$, $c_2(x) = 0.01$ und $f(x,t) = sin(t) + x^2$. Verwenden sie als Zeitschrittweite $\tau = 0.1$ und lösen sie das Problem bis zu Zeitpunkt $T = 1$.