Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 12, Abgabe 26.01.2007

1. Man zeige die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\sin\theta_r h_r^2 \leq \delta_j^h \leq \frac{\sqrt{3}}{2}h_r^2$$

wobei h_r die grösste Seite und θ_r der kleine Winkel der Dreiecks T_j sind.

2. Man zeige die Ungleichung

$$2\ c\ u_T\ i_T \leq \delta_j^h \leq 4\ u_T^2$$

wobei u_T der Umkreisradius, i_T der Inkreisradius und
$c = \min(\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$ ist.
Hinweis: Verwenden sie

$$A = \frac{1}{2}i_T(a+b+c)$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2u_T$$

Die Variable A ist die Fläche des Dreiecks, a, b, c sind die Kanten und α, β, γ sind die gegenüberliegenden Winkel.

3. Zeigen sie die folgende Aussage aus dem Skript

$$\int_\Omega v^2 dx \geq \frac{h^2}{\beta_2}\sum_j V_j^2$$
$$\int_\Omega v^2 dx \leq \frac{h^2}{\beta_1}\sum_j V_j^2$$

Verwenden sie die Abschätzung aus Beispiel 1 (die Konstanten $\beta_1,\ \beta_2$ hängen dann von h_r und θ_r ab).

4. *Implizites Euler-Verfahren*
Wir betrachten die parabolische Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u'(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = 0$$

Mithilfe der vertikalen Liniensuchmethode (siehe Kapitel 1 - Diskretisierung im Ort mittels Finiter Elemente) erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} Mu_h'(t) - Ku_h(t) &= f_h(u) \\ Mu_h(0) &= 0 \end{aligned}$$

K ist die Steifigkeitsmatrix, M bezeichnet die Massenmatrix. Lösen sie dieses System mit dem impliziten Eulerverfahren, d.h.

$$u_{j+1} = u_j + \tau\,(f(t_{j+1} - Ku_{j+1})$$

wobei τ die Zeitschrittweite und $f(t) = sin(t)$ ist. Verwenden sie stückweise lineare Anstzfunktionen und verschiedene Werte für h und τ - vergleichen sie die Lösungen.