Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 11, Abgabe 19.01.2007

1. *Variationformulierung: Nichtlineare Gleichungen*
   Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} -\left(\alpha\left(\left|u'\left(x\right)\right|\right)\right)' &= f(x) \qquad && x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \qquad && x \in \Gamma \end{aligned}$$

   wobei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Berechnen sie die dazughörige Variationsformulierung.

2. *Lax-Milgram für nichtlineare Gleichungen*
   Eine nichtlineare Variationsformulierung kann auch als Operatorgleichungen

$$A(u) = f$$

   geschrieben werden. Dabei bezeichnet $A : V \to V^*$ einen nichtlinearen Operator. Wir benötigen die folgenden Definitionen

   Def: Sei V ein normierter Raum, V^* bezeichne den Dualraum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt stark monoton wenn es eine Konstante $\mu_1 > 0$ mit

$$\langle A(w) - A(v), w - v \rangle \geq \mu_1 \|w - v\|^2$$

   für alle $w, v \in V$ gibt.

   Def: Sei V ein normierter Raum, V^* bezeichne den Dualraum. Ein Operator $A : V \to V^*$ heißt Lipschitz stetig wenn es eine Konstante $\mu_2 > 0$ gibt mit

$$\|A(w) - A(v)\| \leq \mu_2 \|w - v\|$$

   für alle $w, v \in V$.

   Zeigen sie dass das Lemma von Lax Milgram auch für stark monotone und Lipschitz stetige Operatoren gilt.
   Hinweis: Formulieren sie die nichtlineare Variationsungleichung als Fixpunktgleichung

$$u = u - \tau(A(u) - f) = K_\tau(u) + g_\tau$$

   und zeigen sie dass K_τ für geeignete Wahl von τ kontraktiv ist (Banachscher Fixpunktsatz).

3. Zeigen sie, dass die nichtlineare Gleichung aus Beispiel 1) unter der Voraussetzungen dass $\alpha : [0, \infty] \to \mathbb{R}$

(a) die Lipschitz Bedingung

$$|\alpha\,(u) - \alpha\,(v)| \leq L|u - v| \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}$$

(b) und die Monotoniebedingung

$$\alpha(u) - \alpha(v) \geq m(u - v) \quad \text{für alle } u \geq v$$

erfüllt, eine Lösung besitzt.

4. *Programmierbeispiel Puffin*
Verändern die das File Poisson.m so dass sie die folgenden Probleme lösem können

$$-\Delta u + \alpha(x)u = f(x) \qquad\qquad x \in \Omega$$

(a) mit $f = x$, $\alpha(x) = 1$ und homogenen Neumannbedingungen auf dem gesamten Rand.

(b) mit $f(x) = x$, $\alpha(x) = x$ und den Dirichletbedingungen $u = x$ auf dem gesamten Rand.