Übung zu Numerik partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 1, Abgabe bis 27.10.2006, 12 Uhr

1. Konstruieren sie einen Differenzenoperator für die zweite Ableitung $\varphi''(x)$ einer glatten Funktion durch Verwendung der Gitterpunkte $x \pm 2h$, $x \pm h$ und x, sodass ein Restterm der Ordnung h^4 entsteht (analog zum Skriptum, zwei Gleichungen vor (1.2)).

2. Wir betrachten das Randwertproblem

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = f \qquad \text{in } (0,1), \qquad u(0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(1) = 1,$$

   wobei $c = c(x)$ und $f = f(x)$ positive Funktionen von x sind. Führen sie analog zum Skriptum eine finite Differenzen Diskretisierung dieses Problems durch. Zeigen sie, dass für diese Diskretisierung ein diskretes Maximumprinzip gilt, d.h., entweder U^h ist nichtnegativ oder die Maximalwerte werden in den Randpunkten angenommen.

3. Leiten sie eine schwache Formulierung und darauf basierend eine finite Elemente Diskretisierung für das Randwertproblem in Aufgabe 2 her. (Hinweis: wählen sie den Ansatzraum für Lösung und Testfunktionen so, dass immer $\varphi(0) = 0$ für alle Funktionen im Ansatzraum gilt).

4. Lösen Sie für $c(x) = 1 + x^2$ und $f(x) = e^x$ das Randwertproblem aus Aufgabe 2 numerisch mit einer Diskretisierung ihrer Wahl, auf drei verschiedenen Gittern mit Gitterfeinheit $h = 0.1$, $h = 0.01$ und $h = 0.001$. Vergleichen sie die numerischen Lösungen.