
Übung zur Vorlesung
Numerische Analysis
SoSe 2017 — Blatt 8

Abgabe: Do. 28. Juni 2017, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Runge-Kutta Verfahren 3. Stufe) (4 Punkte)

Geben Sie alle 3-stufigen expliziten Runge-Kutta Verfahren mit Konsistenzordnung 3 an.

Aufgabe 2 (Stabilitätsfunktionen der Runge-Kutta Verfahren) (4 Punkte)

Gegeben sei die Schar von linearen AWPen $y' = \lambda y(x), y(0) = y_0$ mit $\lambda < 0, x \in [0, 1]$. Seien $(x_i, u_i)_{i=0, \dots, n-1}$ mit $u_0 = y_0$ durch ein Runge-Kutta Verfahren mit $m \geq 1$ Stufen auf einem äquidistanten Gitter I_h gegeben. Zeigen Sie:

- (a) Ist das Verfahren explizit, so gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{P}^m$ höchstens m -ten Grades mit

$$u_i = (P(\lambda h))^i u_0.$$

- (b) Ist das Verfahren implizit, so gibt es eine rationale Funktion R mit Nenner und Zähler in \mathbb{P}^m mit

$$u_i = (R(\lambda h))^i u_0.$$

- (c) Bestimmen Sie das Polynom P für das verbesserte Euler Verfahren und für das klassische Runge-Kutta Verfahren. Vergleichen Sie es mit der Taylorentwicklung in y_0 für die exakte Lösung des AWP.

Aufgabe 3 (Konvergenzordnung von expliziten Runge-Kutta Verfahren) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Die maximale Konvergenzordnung eines m -stufigen expliziten Runge-Kutta Verfahrens ist m .

Hinweis: Verwenden Sie den Satz zur Taylorentwicklung der Stabilitätsfunktion.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Runge-Kutta Verfahren)

(4 Punkte)

- (a) Implementieren Sie eine Funktion `RungeKutta`, welche zu gegebenen `alpha`, `beta` und `gamma` die zugehörige expliziten Runge-Kutta Verfahrensfunktion zurück gibt. (D.h. Sie dürfen davon ausgehen, dass `beta` eine untere Dreiecksmatrix mit 0-Diagonalen ist.)
- (b) Testen Sie Ihre Implementierung am Verfahren von Heun und dem klassischen Runge-Kutta Verfahren, indem Sie die Differentialgleichung $y' = y, y(0) = 1$ auf $I = [0, 1]$ mit $h = 0.1$ numerisch lösen. Vergleichen Sie auch den jeweiligen Fehler $|y_{10} - e|$.

Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über eine E-mail an `thomasbuddenkotte@freenet.de`. Möchten Sie eine schriftlich Korrektur Ihrer Programmieraufgabe, werfen Sie den ausgedruckten Quellcode bitte in Briefkasten 102 und besuchen Sie die Programmierübung. Die Abgabe der Theorieaufgaben werfen Sie bitte wie üblich in den Briefkasten Ihres Übungsgruppenleiters.

Achtung: Achten Sie darauf, Ihre Programme ordentlich zu formatieren und gut zu kommentieren. Die Form wird mit in die Bewertung eingehen.