Erinnerung Berechnung der Koeffizienten

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Erinnerung Berechnung der Koeffizienten

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Berechnung:

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$\dots$

Erinnerung Berechnung der Koeffizienten

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Berechnung:

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$\ldots$

Erinnerung Berechnung der Koeffizienten

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Berechnung:

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$\ldots$

Erinnerung Berechnung der Koeffizienten

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Berechnung:

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad \text{mit } f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$

$\ldots$

Erinnerung Berechnung der Koeffizienten

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Berechnung:

$$a_0 = f_0$$

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad \text{mit } f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$

$$= f[x_0, x_1, x_2]$$

$\ldots$

Dividierten Differenzen in Form eines Tableaus

$$\begin{array}{ll|lll}
x_0 & a_0 = f_0 & a_1 = f[x_0, x_1] & a_2 = f[x_0, x_1, x_2] & a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
x_1 & f_1 & f[x_1, x_2] & f[x_1, x_2, x_3] & \\
x_2 & f_2 & f[x_2, x_3] & & \\
x_3 & f_3 & & &
\end{array}$$

Dabei ist z.B. $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$.

Beachte, $f_k = f[x_k]$ und $p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k] N_k(x)$ ist das gesuchte Interpolationspolynom.

Beispiel

Daten:

x	3	1	5
f	1	-3	2

Tableau:

3	1	
1	-3	
5	2	

Beispiel

Daten:

x	3	1	5
f	1	-3	2

Tableau:

$$
\begin{array}{cc|l}
3 & 1 & \frac{-3-1}{1-3} = 2 \\
1 & -3 & \frac{2-(-3)}{5-1} = \frac{5}{4} \\
5 & 2 &
\end{array}
$$

Beispiel

Daten:

x	3	1	5
f	1	-3	2

Tableau:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & \frac{5}{4} \\ 5 & 2 & \\ & & \end{array}$$

Beispiel

Daten:

x	3	1	5
f	1	-3	2

Tableau:

$$
\begin{array}{cc|cc}
3 & 1 & 2 & \frac{5/4-2}{5-3} = -\frac{3}{8} \\
1 & -3 & \frac{5}{4} & \\
5 & 2 & & \\
 & & &
\end{array}
$$

Beispiel

Daten:

x	3	1	5
f	1	-3	2

Tableau:

$$
\begin{array}{cc|cc}
3 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} \\
1 & -3 & \frac{5}{4} & \\
5 & 2 & & \\
 & & &
\end{array}
$$

Beispiel

Daten:

x	3	1	5
f	1	-3	2

Tableau:

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} \\ 1 & -3 & \frac{5}{4} & \\ 5 & 2 & & \\ & & & \end{array}$$

Interpolationspolynom:

$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1)$

Beispiel

Daten:

x	3	1	5	6
f	1	-3	2	4

Tableau:

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} \\ 1 & -3 & \frac{5}{4} & \\ 5 & 2 & & \\ & & & \end{array}$$

Interpolationspolynom:
$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1)$

Beispiel

Daten:

x	3	1	5	6
f	1	-3	2	4

Tableau:

$$\begin{array}{cc|cc}
3 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} \\
1 & -3 & \frac{5}{4} & \\
5 & 2 & & \\
6 & 4 & &
\end{array}$$

Interpolationspolynom:
$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1)$

Beispiel

Daten:

x	3	1	5	6
f	1	-3	2	4

Tableau:

$$\begin{array}{cc|ccc}
3 & 1 & 2 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{40} \\
1 & -3 & \frac{5}{4} & \frac{3}{20} & \\
5 & 2 & 2 & & \\
6 & 4 & & &
\end{array}$$

Interpolationspolynom:

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

Algorithmus

Das ganze Tableau soll berechnet und in eine Matrix gespeichert werden. Wenn eine weitere Stützstelle hinzugefügt wird, dann reicht es die Diagonale der dividierten Differenzen auszurechnen.

$$c_{i0} := f_i$$

For $j = 1, \ldots, n$

  For $i = 0, n - j$

    $c_{ij} := \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i}$

Nach Hinzunahme einer weiteren Stützstelle (x_{n+1}, f_{n+1}):

$c_{n+1,0} := f_{n+1}$

For $j = 1, \ldots, n+1$

  $c_{n+1-j,j} := \frac{c_{n+1-j+1,j-1} - c_{n+1-j,j-1}}{x_{n+1} - x_{n+1-j}}$