# Kapitel 5

# Akustik und Elektromagnetik

In diesem Kapitel werden wir uns mit Wellenphänomenen beschäftigen, wie sie bei akustischen und elektromagnetischen Problemen auftreten. Wir beginnen mit akustischen Schallwellen, deren Bewegungsgleichung in der Mathematik meist einfach als *die Wellengleichung* bezeichnet wird. In deren Herleitung folgen wir [13]. Zuvor betrachten wir aber noch einfache eindimensionale Wellen.

## 5.1 Transport- und Wellengleichung

Wir beginnen mit der Modellierung eindimensionaler Wellen, und können dabei die beiden wesentlichen Arten von Wellen herausarbeiten: *Longitudinal-* und *Transversalwellen*. Im longitudinalen Fall ist die Bewegungsrichtung gleich der Ausbreitungsrichtung, im transversalen Fall sind die beiden Richtungen orthogonal. Wir stellen uns dazu Teilchen an gewissen Positionen mit kleinem Abstand $\Delta x$ (im Ruhezustand vor).

Im Fall einer eindimensionalen Longitudinalwelle beschreiben wir die Welle durch die Verschiebung der Partikelposition im Vergleich zur Ruheposition. Ist $x$ die Position in der Ruhelage, $u(x,t)$ die Verschiebung, dann ist $x + u(x,t)$ die verschobene Position. Bei der Welle wird die Verschiebung in einem Zeitschritt von einem Teilchen an das benachbarte Teilchen weitergegeben. Nehmen wir an, die Welle wird von links nach rechts ausgebreitet, dann gilt etwa

$$u(x + \Delta x, t + \Delta t) = u(x,t).$$

Durch Taylor-Entwicklung erster Ordnung folgt

$$u(x,t) + \partial_t u(x,t)\Delta t + \partial_x u(x,t)\Delta x = u(x,t) + \mathcal{O}((\Delta + \Delta x)^2).$$

Durch Vernachlssigung der Terme höherer Ordnung erhalten wir die lineare Transportgleichung

$$\partial_t u \Delta t + c\partial_x u \Delta x = 0$$

mit der Wellengeschwindigkeit $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Betrachten wir umgekehrt eine Welle von rechts nach links, so ist das Prinzip

$$u(x - \Delta x, t + \Delta t) = u(x,t)$$

und die Taylor-Entwicklung liefert

$$\partial_t u \Delta t - c\partial_x u \Delta x = 0.$$

In der Realität beobachten wir Überlagerungen von Wellen von links und rechts, d.h.

$$u(x,t) = u_-(x,t) + u_+(x,t),$$

wobei

$$\partial_t u_\pm \Delta t \pm c \partial_x u_\pm \Delta x = 0.$$

Um eine einzige Gleichung herzuleiten betrachten wir zweite Ableitungen. Es gilt

$$\partial_{tt} u_\pm = \mp c \partial_{xt} u_\pm = c^2 \partial_{xx} u_\pm.$$

Damit erfüllen $u_+$ und $u_-$ die selbe Gleichung zweiter Ordnung, und damit gilt diese Gleichung auch für $u$:

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u. \tag{5.1}$$

Im transversalen Fall kann die Modellierung analog vorgenommen werden. Die Variable dabei ist die Höhe $h(x,t)$, die das Teilchen bei $x$ zur Zeit $t$ einnimmt. Auch dabei gilt für einseitige Wellen

$$h(x \pm \Delta x, t + \Delta t) = h(x,t),$$

was die Transportgleichung

$$\partial_t h \Delta t \pm c \partial_x h = 0.$$

liefert. Ein möglicher Unterschied tritt bei der Superposition auf. Falls eine Welle von links und eine Welle von rechts ankommt, ist es nicht unbedingt möglich die doppelte Höhe zu erreichen (man denke an Wellen in Fussballstadien), also ist die lineare Superposition fragwürdig. Im sehr hochfrequenten Fall kann man einfach annehmen, dass die Höhe das Maximum der beiden Nachbarn erreicht. Dies führt per Taylor-Entwicklung auf die *Eikonal-Gleichung*

$$\partial_t h + |\nabla h| = 0. \tag{5.2}$$

## 5.2 Die akustische Wellengleichung

Ausgangspunkt der Modellierung von Schallwellen sind die Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik, die wir in Kapitel 4 hergeleitet haben. Bei Schallwellen betrachten wir die *isentrope* Situation, d.h., der Druck hängt nur von der Dichte ab. Es genügt in diesem Fall die Massen- und Impulserhaltung zu betrachten, woraus man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \text{ div } u \\ \frac{Du}{Dt} &= -\frac{a^2}{\rho} \nabla \rho, \end{aligned}$$

mit der *Schallgeschwindigkeit* $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$.

Nun betrachten wir den Fall einer Flüssigkeit in Ruhe, d.h., $\rho = \rho_0$ is konstant und $u = 0$, und führen eine kleine Störung zu $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ($\rho_1$ klein) durch, sodass die Geschwindigkeit klein bleibt ($u = u_0 + u_1$, $u_0 = 0$ und $u_1$ klein). Daraus erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{ div } u_1 &= -\text{ div } (\rho_1 u_1) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{a(\rho_0)^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 &= -c \nabla \rho_1 - \nabla \rho_1 \cdot u_1, \end{aligned}$$

mit $c = \frac{a(\rho_0+\rho_1)^2}{\rho_0+\rho_1} - \frac{a(\rho_0)^2}{\rho_0} \sim \rho_1$. Da $\rho_1$ und $u_1$ klein sind, können in erster Näherung die quadratischen Terme auf der rechten Seite vernachlässigt werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{ div } u_1 &= 0\\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{a(\rho_0)^2}{\rho_0}\nabla\rho_1 &= 0.\end{aligned}$$

Kombiniert man diese Gleichungen so erhält man (da $\rho_0$ konstant ist) die sogenannte *lineare Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = a(\rho_0)^2 \Delta\rho_1, \tag{5.3}$$

für die Abweichung der Dichte. Analog erhält man die vektorielle Gleichung

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a(\rho_0)^2 \nabla \text{ div } u_1, \tag{5.4}$$

für die Geschwindigkeit.

Als Randbedingung kann man nun entweder Dirichlet-Bedingungen (d.h. vorgegebene Dichte) oder Neumann-Bedingungen (d.h. vorgegebene Normalgeschwindigkeit) verwenden. Als Anfangsbedingung gibt man normalerweise Druck und Geschwindigkeit vor, wir können aber auch die Identität $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{ div } u_1$ zum Zeitpunkt $t = 0$ benutzen um direkt die Anfangswerte $\rho_1(.,0)$ und $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}(.,0)$ zu erhalten, die man wegen der zwei Zeitableitungen in der Wellengleichungen zum Abschluss des Systems benötigt.

Die sogenannte *akustische Energie* setzt sich zusammen aus der ersten Näherung der kinetische Energie und der Dichte, d.h.

$$E = \frac{\rho_0}{2}\int_\Omega u_1^2 \, dx + \int_\Omega a^2 \frac{\rho_1^2}{\rho_0} \, dx.$$

Die Änderung der Energie ist dann

$$\frac{dE}{dt} = \rho_0 \int_\Omega u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \, dx + \int_\Omega a^2 \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \, dx$$

und nach Einsetzen der obigen Gleichungen für die Änderung von $u_1$ und $\rho$

$$\frac{dE}{dt} = -a^2 \int_\Omega (u_1 \nabla\rho_1 + \rho_1 \text{ div } u_1) \, dx = -a^2 \int_\Omega \text{ div } (\rho_1 u_1) \, dx.$$

Mit Hilfe des Gauss'schen Satzes folgt

$$\frac{dE}{dt} = -a^2 \int_{\partial\Omega} \rho_1 u_1 \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

d.h. die Energieänderung entspricht wieder dem Fluss über den Rand. Für ein geschlossenes System sollten dann klarerweise als Randbedingung entweder $\rho_1 = 0$ (konstante Dichte) oder $u_1 \cdot \mathbf{n} = 0$ (Wandhaftbedingung) gelten, und die Energie bleibt erhalten.

Um die Eigenschaften der Wellengleichung besser zu verstehen, betrachten wir den örtlich eindimensionalen Fall im ganzen Raum, d.h., $\Omega = \mathbb{R}$ und skalieren so, dass $\rho_0 = 1$ und $a^2 = 1$ gilt. Dann lauten die Gleichungen für Dichte $\rho$ und Geschwindigkeit $u$ einfach

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Führen wir nun die Variablen $v = \rho + u$ und $w = \rho - u$ ein, so erhalten wir durch Addition bzw. Subtraktion der obigen Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass diese Erhaltungsgleichungen die Lösungen

$$v(x,t) = v_0(x-t) = \rho_0(x-t) + u_0(x-t)$$

und

$$w(x,t) = w_0(x+t) = \rho_0(x+t) - u_0(x+t)$$

haben, wobei $\rho_0$ und $u_0 = -\frac{\partial \rho_0}{\partial x}$ die Anfangswerte für Dichte und Geschwindigkeit sind. Damit können wir auch die exakte Lösung der Wellengleichung als

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2}\left(\rho_0(x-t) - \frac{\partial \rho_0}{\partial x}(x-t)) + \rho_0(x-t) + \frac{\partial \rho_0}{\partial x}(x+t))\right)$$

berechnen, dem sogenannten d'Alembert'schen Prinzip. Die im Punkt $x$ zur Zeit $t$ eintreffende Wellenfront ist also die Kombination zweier Elementarwellen, die zur Zeit $t = 0$ in den Punkten $x - t$ (in positiver Richtung) und $x + t$ (in negativer Richtung) starten.

Mit den üblichen Skalierungen von Zeit und Ort $t = \tau\tilde{t}$ und $x = \ell\tilde{x}$, sowie der Dichte $\rho = R_0\tilde{\rho}$ erhalten wir in dimensionsloser Form

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{a^2\tau^2}{\ell^2}\Delta_{\tilde{x}}\tilde{\rho}.$$

Ist man an Effekten in der Grössenordnung $\ell$ interessiert, so erscheint es natürlich, als Zeitskala $\tau = \frac{\ell}{a}$ zu wählen, also jene Zeitskala auf der die Welle mit Geschwindigkeit $a$ die Länge $\ell$ zurücklegt. Damit erhält man skaliert

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}^2} = \Delta_{\tilde{x}}\tilde{\rho}.$$

Ändern wir nun die Skalierung zu $\hat{t} = c\tilde{t}$ und $\hat{x} = c\tilde{x}$, so erhalten wir exakt dieselbe Gleichung.

## 5.3 Die Helmholtz-Gleichung

Führt man in der Wellengleichung eine Separation der Variablen ($t$ und $x$) durch, so erhält man Lösungen der Form

$$\rho_1(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\lambda_n t/a} u_k(x),$$

wobei $u_k$ die Eigenfunktion des Laplace Operators und $-\lambda_k^2 < 0$ die zugehörigen Eigenwerte sind (wir setzen $\lambda_{-k} = -\lambda_k$). Die Summanden, d.h., Lösungen der Wellengleichung der Form $\rho(x,t) = e^{i\lambda t/a}u(x)$ heissen *harmonische Wellen* und sind von besonderer Bedeutung. Setzt man $n = \frac{\lambda}{a}$, so erfüllt die komplexwertige Funktion $u$ die Differentialgleichung

$$\Delta u + n^2 u = 0,$$

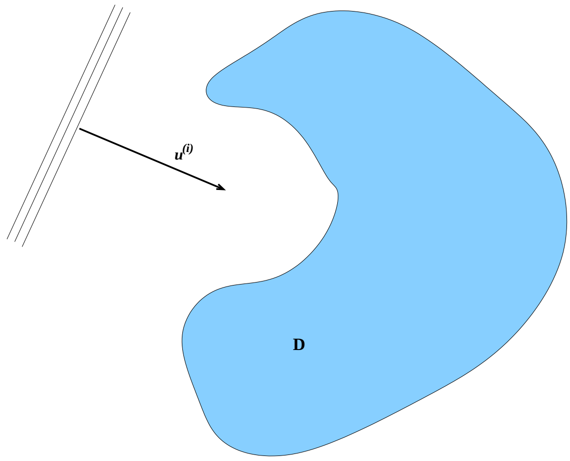


Abbildung 5.1: Streuung an einem Hindernis.

die sogenannte *Helmholtz-Gleichung*. Der Skalar $n$ heisst *Brechungsindex*, in Medien mit nicht konstanter Wellengeschwindigkeit ist der Brechungsindex ebenfalls eine Funktion des Orts.

Für $n \in \mathbb{R}$ erhält man eine ungedämpfte Wellenausbreitung, während es für $n \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ zu einer Dämpfung der Schwingung kommt.

Als Randbedingungen verwendet man:

- **Schallharte** Randbedingung: $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ (entspricht der Wandhaftbedingung für die Wellengeschwindigkeit).
- **Schallweiche** Randbedingung: $u = 0$ (entspricht einer festen Dichte am Rand).
- **Impedanz-**Randbedingung: $\frac{\partial u}{\partial n} + i\eta n u = 0$. Der Wert $\eta$ heisst (akustische) Impedanz.

Auf einem unbeschränkten Gebiet verwendet man die *Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung*,

$$\frac{\partial u}{\partial r} - inu = \mathcal{O}\left(r^{\frac{1-d}{2}}\right), \qquad r = |x|,$$

die den sinnvollen Abfall der Welle modelliert und die Eindeutigkeit der Lösung erzwingt.

Ein besonders interessanter Effekt, der durch die Helmholtz-Gleichung modelliert wird, ist die Streuung von Wellen. Dabei ist das Feld $u$ eine Überlagerung einer (bekannten) einfallenden Welle $u^{(i)}$ und einer (unbekannten) gestreuten Welle $u^{(s)}$, d.h. $u = u^{(i)} + u^{(s)}$. Die Streuung passiert an einem Hindernis $D$, und die Welle breitet sich in $\mathbb{R}^d \backslash D$ aus. Damit erhält man ein *Aussenraumproblem* für die Helmholtzgleichung, d.h., eine Differentialgleichung auf einem unbeschränkten Gebiet mit Randproblemen auf dem Rand eines inneren Gebiets. Von besonderem Interesse als einfallende Wellen sind *ebene Wellen* der Form $u^{(i)} = e^{in\alpha\cdot x}$, mit einem normierten Vektor $\alpha$, d.h. $|\alpha| = 1$. Die ebene Welle ist eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, und damit erfüllt die gestreute Welle ebenfalls die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u^s + n^2 u^s = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^d \backslash D$$

und die einfallende Welle tritt nur mehr in der Randbedingung auf, z.B. bei einem schallweichen Hindernis ist

$$u^{(s)} = -u^{(i)} \qquad \text{auf } \partial D.$$

## 5.4 Die Maxwell-Gleichungen

Elektromagnetische Wechselwirkungen passieren im allgemeinen zwischen geladenen Atomteilchen (Elektronen, Protonen) oder Molekülen (Ionen), und erfüllt die folgenden Eigenschaften

- Es gibt zwei Arten von Ladungen, positive und negative.
- Gleiche Ladungen stoßen sich ab.
- Ungleiche Ladungen ziehen sich an.
- Die Kraftwirkungen verschiedener Ladungen addieren sich.
- Ungeladene Körper erfahren eine Kraftwirkung durch Influenz.

Wir haben bereits im letzten Kapitel schematisch das *Coulomb'sche Gesetz* kennengelernt, dass die Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen beschreibt. Sei $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, dann ist die Coulomb Kraft auf Teilchen 1 gegeben durch

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3}\mathbf{r}_{12}$$

mit der Permittivität des Vakuums $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$, wobei 1C= 1As

Die makroskopischen Grössen, die zur Beschreibung elektromagnetischer Wellen verwendet werden, sind das elektrische Feld $\mathbf{E}$, das magnetische Flußdichte $\mathbf{B}$, die magnetische Feldstärke $\mathbf{H}$ und die elektrische Verschiebungsdichte $\mathbf{D}$. Das elektrische Feld kann als Grenzwert der Kraft für verschwindende Elementarladung $q$ gesehen werden, d.h.

$$\mathbf{E} = \lim_{q\to 0}\frac{F(q)}{q}.$$

Weiters benötigt man noch die Ladungsdichte $\rho$ und die Stromdichte $\mathbf{J}$.

Die Verschiebungsdichte und das elektrische Feld sind durch ein Materialgesetz verbunden, im isotropen Fall verwendet man meist

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

wobei $\epsilon$ die Permittivität bezeichnet. In ähnlicher Weise verknüpft man das magnetische Feld und die magnetische Flußdichte durch

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$$

wobei $\mu$ die Permeabilität bezeichnet.

Kontinuitätsgleichungen erhält man nun aus physikalischen Gesetzen: Zunächst gilt das elektrische Gauss'sche Gesetz, d.h. der elektrische Fluß durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich der im Inneren enthaltenen Ladungsmenge. Sei also $W$ ein beliebiges Teilgebiet, dann gilt

$$\int_{\partial W}\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\;dS = \int_W \rho\;dx,$$

bzw. durch partielle Integration

$$\int_W (\text{div } \mathbf{D} - \rho) \; dx = 0.$$

Da das Teilgebiet beliebig gewählt war, folgern wir wieder eine differentielle Form

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho.$$

Analog gibt es ein magnetisches Gauss'sches Gesetz, aus dem wir die differentielle Gleichgung

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

erhalten.

Weiters gilt das Induktionsgesetz, d.h. der von einem Magnetfeld induzierte Strom ist gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses, d.h.

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_W \mathbf{B} \; dx,$$

wobei das negative Vorzeichen auf Grund der Lenz'schen Regel ("Der induzierte Strom ist so gerichtet, dass er der Ursache entgegenwirkt") gewählt wird. Nach dem Faraday'schen Gesetz ist der induzierte Strom gegeben durch das elektrische Feld entlang des Randes, d.h.

$$U_{ind} = \int_{\partial W} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Mit dem Stoke'schen Satz ist dann

$$U_{ind} = -\int_W \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \; dx = \int_W \nabla \times \mathbf{E} \; dx$$

und damit in differentieller Form

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

Mit einer ähnlichen Argumentation können wir auch eine Beziehung zwischen dem elektrischen Fluss, der Stromdichte und dem magnetischen Feld herleiten, und schliesslich erhalten wir die *Maxwell Gleichungen*

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && (5.5) \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} && (5.6) \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho && (5.7) \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. && (5.8) \end{aligned}$$

Aus den Maxwell-Gleichungen erhalten wir auch wieder die Kontinuitätsgleichung für $\rho$ und $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$. Nehmen wir die Divergenz von (5.6), dann gilt da die Divergenz einer Rotation verschwindet

$$\text{div } \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

## 5.5 Zeitharmonische Wellen

Wie schon im akustischen Fall sind zeitharmonische Wellen von besonderem Interesse, d.h., wir machen den Ansatz

$$\mathbf{E}(x,t) = \hat{\mathbf{E}}(x)e^{-i\omega t}, \qquad \mathbf{H}(x,t) = \hat{\mathbf{H}}(x)e^{-i\omega t},$$

weiters verwenden wir die Relationen $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Natürlich ist dies nur dann sinnvoll wenn auch die Quellterme zeitharmonisch sind, d.h., $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}e^{-i\omega t}$ und $\rho = \hat{\rho}e^{-i\omega t}$.

Damit erhalten wir die stationären harmonischen Maxwell-Gleichungen als

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\mathbf{E}} - i\omega\mu\hat{\mathbf{H}} &= 0 && (5.9)\\ \nabla \times \hat{\mathbf{H}} + i\omega\epsilon\hat{\mathbf{E}} &= \hat{\mathbf{J}} && (5.10)\\ \text{div }(\epsilon\hat{\mathbf{E}}) &= \hat{\rho} && (5.11)\\ \text{div }(\mu\hat{\mathbf{H}}) &= 0. && (5.12) \end{aligned}$$

Der zeitharmonische Fall bei den Maxwell-Gleichungen stellt das Analogon zum Übergang von der Wellengleichung auf die Helmholtz-Gleichung dar, und die Effekte sind sehr ähnlich. Falls jedoch keine Magnetisierung vorliegt ($\hat{H} = 0$) und ein elektrisches Potential existiert, ändert sich das Verhalten grundlegend, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden.

## 5.6 Potentialgleichung und Transversalwellen

Wir nehmen nun an, dass keine Magnetisierung vorliegt, d.h. $\hat{\mathbf{H}} = 0$ und dass $\nabla \times \hat{\mathbf{J}} = 0$ gilt. Dann können wir ein elektrisches Potential $\phi$ finden, sodass

$$\hat{\mathbf{J}} = -i\omega\epsilon\nabla\phi.$$

Die Kontinuitätsgleichung hat dann die Form

$$-i\omega \text{ div }(\epsilon\nabla\phi) = \text{div }\hat{\mathbf{J}} = i\omega\hat{\rho}.$$

Das elektrische Feld wählen wir dazu als $\hat{\mathbf{E}} = -\nabla\phi$. Man erkennt, dass alle Maxwell-Gleichungen in diesem Fall automatisch erfüllt sind: die erst wegen $\nabla \times \nabla = 0$ und $\hat{\mathbf{H}} = 0$, die zweite wegen der Annahme an $\hat{\mathbf{J}}$ und $\hat{\mathbf{H}} = 0$, die dritte folgt aus der Kontinuitätsgleichung und die vierte wieder aus $\hat{\mathbf{H}} = 0$.

In diesem Fall reduziert sich das gesamte Maxwell-System auf die sogenannte *Potentialgleichung*

$$-\text{div }(\epsilon\nabla\phi) = \hat{\rho},$$

eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung für das Potential. Vom ursprünglichen Wellencharakter der Maxwell-Gleichungen bleibt also wenig übrig.

Weitere interessante Spezialfälle der Maxwellgleichungen, die auf skalare Differentialgleichungen reduziert werden können, sind sogennante *Transversalwellen*. Bei diesen verschwindet nicht das gesamte magnetische Feld, sondern die Komponenten in Ausbreitungsrichtung (d.h., die Polarisierung ist transversal). Man unterscheidet dabei in transvers elektrische (TE) Polarisierung, bei der das elektrische Feld normal zur Ausbreitungsrichtung ist, und transvers magnetische (TM) Polarisierung, bei der das magnetische Feld normal zur Ausbreitungsrichtung ist.

Wir betrachten dies näher im Fall einer Welle, die sich in der $x-y-$Ebene ausbreitet, d.h., das elektrische und magnetische Feld sind unabhängig von $z$. Bei der TE-Polarisierung ist das elektrische Feld von der Form $\hat{\mathbf{E}} = (0, 0, E_z(x, y))$, was nur möglich ist für $\hat{\mathbf{J}} = (0, 0, J_z(x, y))$. Damit hat die erste Maxwell-Gleichung die Form

$$(\frac{\partial E_z}{\partial y}, -\frac{\partial E_z}{\partial x}, 0) = i\omega(H_x, H_y, H_z),$$

d.h., das magnetische Feld hat die Form

$$\hat{\mathbf{H}} = (H_x(x, y), H_y(x, y), 0).$$

Setzt man die erste in die zweite Maxwell-Gleichung ein, so erhält man die skalare Gleichung

$$\nabla^* \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times E_z\right) + \epsilon\omega^2 E_z = -i\omega J_z,$$

wobei wir die Schreibweise $\nabla \times E_z = (\frac{\partial E_z}{\partial y}, -\frac{\partial E_z}{\partial x})$ und $\nabla^* \times (A, B) = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$ verwenden. Ist $\mu$ konstant und $J_z = 0$, so kann man diese Gleichung zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta E_z + n^2 E_z = 0$$

reduzieren, mit $n = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$. Eine analoge Reduktion ist im transvers magnetischen Fall möglich, dort erhält man eine Gleichung für $H_z(x, y)$.