

Kapitel 3

Mikroskopische Interaktion und Makroskopisches Verhalten

Im Folgenden werden wir uns mit Modellen für viele Teilchen (in sehr allgemeinem Sinn) beschäftigen, die auf einer mikroskopischen Skala im wesentlichen durch die Newton'schen Bewegungsgleichungen beschrieben werden.

3.1 Die Newton'schen Gesetze

In der klassischen Teilchenmechanik betrachten wir Modelle für sehr kleine Massen (Atome oder Moleküle), die wir als N Massenpunkte (ohne eigene räumliche Ausdehnung) idealisieren. Damit können wir das System beschreiben durch

$$\begin{aligned} r_i(t) \in \mathbb{R}^3 & : \text{Position des Teilchens } i \text{ zum Zeitpunkt } t \\ m_i \in \mathbb{R}_+ & : \text{Masse des Teilchens } i. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Grössen können wir auch den Impuls p_i und die Kraft f_i berechnen, gegeben durch die Newton'schen Gesetze als

$$p_i(t) = m_i r_i'(t) \tag{3.1}$$

$$f_i(t) = p_i'(t) = m_i r_i''(t). \tag{3.2}$$

Wir nehmen an, dass eine Kraft $g_{ij}(t) = G_{ij}(r_i, r_j)$ zwischen diesen Teilchen wirkt, ebenso wie eine äussere Kraft $F_i = F_i(r_i, t)$. Aus dem dritten Newton'schen Gesetz (Prinzip von Kraft und Gegenkraft) erhalten wir die Bedingung $g_{ij} = -g_{ji}$ und dies ist erfüllt für

$$G_{ij}(r_i, r_j) = \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} H_{ij}(|r_i - r_j|).$$

Wir erhalten nun aus der Kräftebilanz für ein Teilchen die Differentialgleichung

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2}(t) = \sum_j \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) + F_i(r_i(t), t),$$

die sogenannte *Bewegungsgleichung*.

Das Vorzeichen der Funktion H_{ij} bestimmt die Art der Wechselwirkung zwischen den Teilchen, wir unterscheiden in

$$\begin{aligned} \text{abstoßende Wechselwirkungen:} & \quad H_{ij}(\cdot) > 0 \\ \text{anziehende Wechselwirkungen:} & \quad H_{ij}(\cdot) < 0. \end{aligned}$$

Klassische Beispiele für die Wechselwirkung zwischen Teilchen sind:

- *Gravitationskräfte*, beschrieben durch $H_{ij}(s) = -G_0 \frac{m_i m_j}{s^2}$, wobei $G_0 > 0$ die Gravitationskonstante ist. In diesem Fall ist klarerweise $H_{ij} < 0$, d.h., die Wechselwirkung ist anziehend.
- *Elektrische Kräfte*, die zwischen geladenen Teilchen auftreten, werden durch

$$H_{ij}(s) = K \frac{Q_i Q_j}{s^2}$$

beschrieben, wobei K ein Proportionalitätsfaktor und Q_i die Ladung des Teilchens i ist. In diesem Fall kann die Wechselwirkung sowohl anziehend (wenn $Q_i Q_j < 0$ ist, d.h., die Teilchen i und j haben Ladungen verschiedener Vorzeichen) oder abstoßend (wenn $Q_i Q_j > 0$ ist, d.h., die Teilchen i und j haben Ladungen gleicher Vorzeichen) sein.

Die Bewegungsgleichungen sind ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wir benötigen deshalb noch Anfangsbedingungen, im allgemeinen sind dies die Position $r_i(0)$ und der Impuls $p_i(0) = m_i r_i'(0)$. Die Bewegungsgleichungen lassen sich auch als System von Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben, wenn man den Impuls als freie Variable betrachtet, es gilt dann

$$m_i \frac{dr_i}{dt}(t) = p_i(t) \tag{3.3}$$

$$\frac{dp_i}{dt}(t) = \sum_j \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) + F_i(r_i(t), t). \tag{3.4}$$

Dieses System für die Positionen und Impulse der einzelnen Teilchen erfüllt einige Erhaltungsgleichungen für Gesamtgrößen des Systems. Eine solche ist der Gesamtimpuls $p = \sum_i p_i$, für den man aus Summation von (3.4) über i die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i,j} \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) + \sum_i F_i(r_i(t), t)$$

erhält. Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) &= \sum_{i>j} \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) + \\ &\quad \sum_{i<j} \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) \\ &= \sum_{i>j} \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) - \\ &\quad \sum_{i>j} \frac{r_i(t) - r_j(t)}{|r_i(t) - r_j(t)|} H_{ij}(|r_i(t) - r_j(t)|) \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{dp}{dt} = \sum_i F_i(r_i(t), t) =: F(t),$$

d.h., die Impulsänderung ist gleich der Summe der äusseren Kräfte. Wirken keine äusseren Kräfte, so bleibt der Gesamtimpuls konstant.

Eine weitere Erhaltungsgrösse ist der Drehimpuls L . Die einzelnen Drehimpulse sind gegeben durch

$$L_i = (r_i - r_0) \times p_i$$

für einen fixen Punkt $r_0 \in \mathbb{R}^3$, die Drehmomente durch

$$M_i = (r_i - r_0) \times F_i.$$

Der Gesamtdrehimpuls $L = \sum_i L_i$ erfüllt nun

$$\frac{dL}{dt} = M$$

d.h., die Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment (siehe Übung).

Zum Abschluß betrachten wir auch noch die Energieerhaltung. Die kinetische Energie des Systems ist gegeben durch

$$T = \sum_i m_i \frac{|r_i'|^2}{2} = \sum_i \frac{|p_i|^2}{2m_i},$$

und die von den äusseren Kräften pro Zeit verrichtete Arbeit (Leistung) ist

$$W = \sum_i r_i' \cdot F_i = \sum_i \frac{p_i}{m_i} \cdot F_i.$$

Weiters lässt sich unter der obigen Form der Wechselwirkung eine potentielle Energie der Form

$$V = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j V_{ij}(|r_i - r_j|)$$

definieren, wobei V_{ij} eine Stammfunktion von H_{ij} ist. Die Gesamtenergie des Systems ergibt sich dann als $E = T + V$. Für die Änderung der kinetischen Energie erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_i \frac{p_i}{m_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} = \sum_i \frac{dr_i}{dt} \cdot \frac{dp_i}{dt} \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{dr_i}{dt} \cdot \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} H_{ij}(|r_i - r_j|) \right) + \sum_i \frac{p_i}{m_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\left(\frac{dr_i}{dt} - \frac{dr_j}{dt} \right) \cdot \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} H_{ij}(|r_i - r_j|) \right) + W \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{d}{dt} V_{ij}(|r_i - r_j|) + W \\ &= -\frac{dV}{dt} + W, \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = W,$$

d.h., es gilt wieder das Prinzip der Energieerhaltung (Änderung der Gesamtenergie gleich Leistung der äusseren Kräfte).

Die obigen Aussagen gelten im wesentlichen für *isotrope* Situationen, d.h., das Material verhält sich in alle Richtungen gleich. Bei *anisotropen* Materialien (in gewissen Kristallstrukturen) muss man im wesentlichen nur die euklid'sche Norm $|\cdot|$ im \mathbb{R}^3 durch ein geeignetes positives und homogenes Funktional $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ersetzen, das die Anisotropie modelliert. Die Wechselwirkungen haben dann die Form

$$G_{ij}(r_i, r_j) = \nabla\gamma(r_i - r_j)H_{ij}(\gamma(r_i - r_j)),$$

und die weiteren Aussagen lassen sich analog herleiten.

In einigen Fällen sind die obigen Annahmen basierend auf energiehaltenden Kräften zu einfach und es treten dissipative Kräfte (Reibung) auf. Dies werden wir im folgenden Abschnitt an einem Beispiel mit weniger physikalischen Kräften näher diskutieren.

3.2 Strassenverkehr

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Modellierung des Verkehrs auf einer langen einspurigen Strasse (vermeiden also schwierigere Aspekte wie Überholmanöver oder Kreuzungen, die man ebenfalls modellieren kann, siehe [11]). Durch die Bewegung von Gaspedal bewirkt der Fahrer im wesentlichen eine Änderung der Beschleunigung, also hat man auch hier einen natürlichen Ansatz über die Newton'schen Bewegungsgleichungen - das Auto kann als starrer Körper vorausgesetzt werden. Die folgenden Beobachtungen sind wesentlich für die Erstellung des Modells

- Abhängig von äusseren Gegebenheiten hat jeder Fahrer eine *Wunschgeschwindigkeit* $v^0(x, t)$, d.h. er würde ohne weiteren Verkehr an der Stelle x zur Zeit t mit dieser Geschwindigkeit fahren. Die Wunschgeschwindigkeit wird nur bestimmt durch äussere Einflüsse wie Strassenverkehrsordnung (Tempolimit), Leistungsfähigkeit seines Wagens und eigene Einschätzungen wie Sicherheit.
- Abhängig von anderen Verkehrsteilnehmern wird diese Wunschgeschwindigkeit angepasst. Die Abhängigkeit passiert dabei vor allem vom Fahrzeug vor ihm, eventuell noch von weiteren Fahrzeugen davor. Die Fahrzeuge hinter dem jeweiligen Fahrer spielen dabei kaum eine Rolle.
- Jeder Fahrer versucht einen gewissen Wunschabstand zum Fahrzeug vor ihm zu halten, dieser Abstand wächst mit der Geschwindigkeit.

Diese Beobachtungen lassen sich sehr leicht in ein mathematisches Modell übersetzen. Wir nummerieren die N Fahrzeuge entlang der Strasse so, dass Fahrzeug $i + 1$ jeweils genau nach Fahrzeug i fährt. Die Position des Fahrzeugs identifizieren wir mit dem Punkt $x_i(t)$ (seinem Mittelpunkt), die Geschwindigkeit mit v_i . Es gilt natürlich

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = v_i(t), i = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Die weiteren Beobachtungen können wir nun recht allgemein als

$$\frac{dv_i}{dt}(t) = F_i(v_i(t) - v_i^0(x_i(t), t), x_{i+1}(t) - x_i(t) - d_i(v_i(t))) \quad (3.6)$$

formulieren, wobei d_i den geschwindigkeitsabhängigen Sicherheitsabstand bezeichnet. Die meisten Abhängigkeiten kann man dabei linear approximieren, z.B. ist für den Sicherheitsabstand ein Ansatz

$$d_i(v_i(t)) = a_i v_i(t) + b_i \quad (3.7)$$

mit Konstanten a_i und b_i realistisch. Eine wirklich nichtlineare Abhängigkeit ist nur für die Abhängigkeit vom Abstand (relativ zum Sicherheitsabstand) wichtig. Bei sehr kleinem Abstand wird man natürlich extrem bremsen, während man bei grossem Abstand nur sehr langsam und sanft abbremst. Es bietet sich also eine Wahl der Form

$$F_i(v, x) = -\frac{v}{\tau_i} - c_i x^{-e_i} \quad (3.8)$$

mit $e_i > 0$ an. Dies führt dann auf die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv_i}{dt}(t) = -\frac{v_i(t) - v_i^0(x_i(t), t)}{\tau_i} - c_i (x_{i+1}(t) - x_i(t) - d_i(v_i(t)))^{-e_i} \quad (3.9)$$

Wir sehen aus der Analyse von (3.9), dass τ_i die Dimension einer Zeit hat, dieser Wert wird auch als Relaxationszeit bezeichnet. In Situationen in denen keine (vernachlässigbare) Interaktion mit dem Fahrzeug davor stattfindet, ist τ_i eine typische Zeitskala bis die Geschwindigkeit v_i^0 (fast) angenommen wird: es gilt dann (mit v_i^0 konstant)

$$v_i(t) = v_i^0(1 - e^{-t/\tau_i}) + v_i(0)e^{-t/\tau_i}.$$

Wir betrachten nun noch kurz die Skalierung der Bewegungsgleichung. Dazu wählen wir eine typische Länge L und eine typische Geschwindigkeit V , woraus sich eine typische Zeit $T = \frac{L}{V}$ ergibt (oder umgekehrt). Wir skalieren Ort und Zeit zu

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{V}.$$

Mit dieser Wahl bleibt sinnvollerweise die Definition der Geschwindigkeit gleich, d.h.

$$\frac{d\tilde{x}_i}{d\tilde{t}} = \tilde{v}_i.$$

Für die Bewegungsgleichung erhalten wir

$$\frac{d\tilde{v}_i}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = -\frac{\tilde{v}_i(\tilde{t}) - \tilde{v}_i^0}{(\tau_i/T)} - \tilde{c}_i \left(\tilde{x}_{i+1}(\tilde{t}) - \tilde{x}_i(\tilde{t}) - \tilde{d}_i \right)^{-e_i}$$

mit reskaliertem Wunschgeschwindigkeit \tilde{v}_i^0 und einer dimensionslosen Konstante \tilde{c}_i .

Um das Verhalten auf einer relativ grossen Zeitskala zu betrachten, führen wir nun den Grenzwert $T \rightarrow \infty$ durch. Im dimensionslosen Fall bedeutet dies, wir betrachten $\epsilon = \frac{T_0}{T} \rightarrow 0$, wobei τ_0 ein typischer Wert für die Relaxationszeiten τ_i ist. Aus der ursprünglichen Skalierung

ist zu beachten, dass die Konstante \tilde{c}_i proportional zu T bzw. $\frac{1}{\epsilon}$ ist. Wir definieren also $\tilde{C}_i = \frac{\tilde{c}_i}{\epsilon}$, und schreiben die Bewegungsgleichung zu

$$\epsilon \frac{d\tilde{v}_i}{dt}(\tilde{t}) = -\frac{\tilde{v}_i(t) - \tilde{v}_i^0}{(\tau_i/\tau_0)} - \tilde{C}_i \left(\tilde{x}_{i+1}(t) - \tilde{x}_i(t) - \tilde{d}_i \right)^{-e_i}.$$

Wir sehen also, dass im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ nur die Gleichung

$$\tilde{v}_i(t) = \tilde{v}_i^0 - \frac{\tau_i}{\tau_0} \tilde{C}_i \left(\tilde{x}_{i+1}(t) - \tilde{x}_i(t) - \tilde{d}_i \right)^{-e_i}$$

übrig bleibt. Ignorieren wir zunächst die Abhängigkeit des Sicherheitsabstands d_i von der Geschwindigkeit v_i , so haben wir also eine explizite Relation für die Geschwindigkeit (andernfalls ist noch eine algebraische Gleichung für v_i zu lösen). Wir können diese Relation in die erste Differentialgleichung einsetzen und erhalten das asymptotische Modell

$$\frac{d\tilde{x}_i}{d\tilde{t}} = \tilde{v}_i^0 - \frac{\tau_i}{\tau_0} \tilde{C}_i \left(\tilde{x}_{i+1}(t) - \tilde{x}_i(t) - \tilde{d}_i \right)^{-e_i}, \quad (3.10)$$

also ein geschlossenes System von Differentialgleichungen nur für die Positionen der Teilchen.

Langzeitverhalten von Bewegungsgleichungen

Wir betrachten nun in etwas allgemeinerer Form den obigen Grenzwert, für (dimensionslose) Bewegungsgleichungen mit Dämpfungsterm (Reibung)

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \quad \frac{dv_i}{dt} = -\epsilon v_i - \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ und einer potentiellen Energie U . In diesem Fall gilt wegen der Dämpfung keine Energieerhaltung, sondern die Dissipationsrelation

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(\mathbf{x}) \right) = -\epsilon \sum_i m_i v_i^2.$$

Die Reskalierung für lange Zeit erhält man mit der neuen Zeitvariable $\tau = \epsilon t$ und der Geschwindigkeit $w_i = \epsilon v_i$. Das reskalierte Problem ist dann

$$\frac{dx_i}{d\tau} = w_i \quad \epsilon^2 \frac{dw_i}{d\tau} = -w_i - \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

Der naheliegende Grenzwert ist also

$$w_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

Diese Reduktion gilt natürlich nur für sinnvoll lange Zeit, d.h. für $\tau \gg \epsilon$. Bei einem allgemeinen Anfangswert für v_i kann in einer anfänglichen (schnellen) Zeitskala der Ordnung ϵ eine völlig andere Dynamik auftreten, die sich dann zur Lösung von (3.13) einschwingt. Die

reduzierte Dynamik (3.13) ist ein sogenannter Gradientenfluss für die potentielle Energie. Es gilt

$$\frac{d}{dt}U(\mathbf{x}) = - \sum_i m_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 = - \sum_i \frac{1}{m_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right)^2.$$

Damit wird die potentielle Energie während der Evolution monoton reduziert und stoppt in lokalen Minima der potentiellen Energie. Dies kann eventuell auch auf einer sehr grossen Zeitskala eine Abweichung von der Dynamik der Newton'schen Bewegungsgleichungen ergeben. Durch die zusätzliche kinetische Energie ist es dort nämlich möglich auch lokale Minima der potentiellen Energie wieder zu verlassen. Diese Eigenschaft kann durch zusätzliche stochastische Störungen modelliert werden, die wir später noch kennen lernen.

3.3 Der Übergang zum Kontinuum

Im Folgenden betrachten wir den Übergang zu Kontinuumsmodellen, entsprechend dem Grenzwert $N \rightarrow \infty$. Der Fall vieler Teilchen ist meist der Interessante, z.B. bei der Verkehrsmodellierung. Wir betrachten also wieder (3.9) für N Teilchen mit Vereinfachung bei Wunschgeschwindigkeit und Sicherheitsabstand:

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt}(t) = - \frac{v_i(t) - v_i^0}{\tau_i} - c_i (x_{i+1}(t) - x_i(t) - d_i)^{-e_i}. \quad (3.14)$$

Der Grenzwert zum Kontinuum passiert im Falle sehr vieler Teilchen, d.h. mathematisch $N \rightarrow \infty$. Bei so einem Grenzübergang ist es wichtig, eine richtige Skalierung mit N zu finden, was oft keine triviale Aufgabe ist - in der Praxis beobachtet man ja nur gewisse (wenn auch sehr grosse N) aber nicht wirklich eine Folge von grösser werdenden bis zum Grenzwert. Eventuell erhält man für verschiedene Skalierungen mit N auch verschiedene Grenzwerte - bei zu grosser Unsicherheit funktioniert es nur, diese Grenzwerte durchzuführen und die Resultate mit dem diskreten Modell für typische Werte von N zu vergleichen, um deren Güte zu bewerten. Im Fall der Verkehrsdynamik kann es z.B. sinnvoll die Position der Teilchen mit N zu skalieren, d.h. eine neue Variable $\tilde{x}_i = \frac{x_i}{N}$ (und entsprechend $\tilde{v}_i = \frac{v_i}{N}$ oder eine neue Zeitskala $\tilde{t} = \frac{t}{N}$) zu betrachten. Dann gilt

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt}(t) = \tilde{v}_i, \quad \frac{d\tilde{v}_i}{dt}(t) = - \frac{\tilde{v}_i(t) - v_i^0}{\tau_i} - \frac{c_i}{N} (N(\tilde{x}_{i+1}(t) - \tilde{x}_i(t)) - d_i)^{-e_i}. \quad (3.15)$$

Da nun anzunehmen, dass die typische negative Beschleunigung c_i auf der neuen Ortsskala ebenfalls mit N skaliert, betrachten wir im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ die Grösse $\tilde{c}_i = \frac{c_i}{N}$ als Konstante. Weiters ignorieren wir der Einfachheit halber im folgenden alle Abhängigkeit der Parameter vom Index i , wir betrachten also das Modell

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt}(t) = \tilde{v}_i, \quad \frac{d\tilde{v}_i}{dt}(t) = - \frac{\tilde{v}_i(t) - v^0}{\tau} - \tilde{c} (N(\tilde{x}_{i+1}(t) - \tilde{x}_i(t)) - d)^{-e}. \quad (3.16)$$

Im Grenzwert ist es unangenehm das System durch unendlich viele Teilchen beschreiben zu müssen. Deshalb betrachtet man eher die Dichte der Teilchen als geeignete Unbekannte. Die (normierte) Dichte ist definiert durch

$$\int_D \rho^N(x, t) dx = \frac{\text{Anzahl der Teilchen in } D \text{ zur Zeit } t}{N}. \quad (3.17)$$

für jedes beliebige Teilgebiet D . Daraus ergibt sich, dass für das klassische Teilchenmodell keine wirkliche Dichte existieren kann (da die Teilchen Grösse null haben), sondern

$$\rho^N(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \tilde{x}_i(t))$$

mit der Dirac-delta Distribution gilt. Jedes ρ^N ist nun eine Distribution in \mathbb{R} und der Grenzwert $N \rightarrow \infty$ entspricht nun der (schwachen) Konvergenz dieser Folge von Distributionen. Im Grenzwert hofft man natürlich darauf, eine wirkliche Dichte, d.h. eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ zu erhalten, was meist auch der Fall ist. Im eindimensionalen Fall ist der Grenzwert noch leichter über die Verteilungsfunktionen F^N definiert durch

$$F_N(-\infty, t) = 0, \quad \frac{\partial F^N}{\partial x}(x, t) = \rho^N(x, t)$$

bzw. der inverse Funktionen betrachten. Die Verteilungsfunktionen F^N sind Treppenfunktionen von der Form

$$F^N(x, t) = \frac{i}{N} \quad \text{für } x \in (\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}).$$

Insbesondere sind alle F^N wachsende Funktionen mit Wertebereich $[0, 1]$ und deshalb kann man eine Pseudo-Inverse der Form

$$u^N(s, t) = \tilde{x}_i \quad \text{für } s \in \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)$$

definieren. Es liegt nahe, auch der Geschwindigkeit eine Treppenfunktion in dieser Form zuzuordnen, d.h.

$$V^N(x, t) = \tilde{v}_i \quad \text{für } s \in \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right).$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann in der Form

$$\frac{\partial u^N}{\partial t}(s, t) = V^N(s, t), \quad \frac{\partial V^N}{\partial t}(s, t) = -\frac{V^N(s, t) - v^0}{\tau} - \tilde{c} \left(\frac{u^N(s + h_N, t) - u^N(s, t)}{h_N} - d \right)^{-e}. \quad (3.18)$$

schreiben, mit der Schrittweite $h_N = \frac{1}{N}$. Man erkennt, dass

$$\frac{u^N(s + h_N, t) - u^N(s, t)}{h_N} - d$$

einer Diskretisierung der partiellen Ableitung nach s mit einem Vorwärts-Differenzenquotienten entspricht. Wir erwarten also im Grenzwert bei Konvergenz von $u^N \rightarrow u$ und $V^N \rightarrow V$ das Modell

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = V(s, t), \quad \frac{\partial V}{\partial t}(s, t) = -\frac{V(s, t) - v^0}{\tau} - \tilde{c} \left(\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) - d \right)^{-e}. \quad (3.19)$$

Wir sehen also, dass wir im Grenzwert ein System von partiellen Differentialgleichungen erhalten. Diese sind allerdings noch in etwas ungewöhnlichen Variablen definiert, nämlich in der Inversen der Verteilungsfunktion und der Geschwindigkeit in dieser inversen Variable. Um ein

vernünftigeres Modell für die Evolution der Dichte und die Geschwindigkeit im Ort zu erhalten, transformieren wir die Variablen zurück. Unter der Annahme, dass u monoton wachsend ist, gilt für die zugehörige Verteilungsfunktion

$$F(u(s, t), t) = s, \quad u(F(x, t), t) = x.$$

Mit der Kettenregel und der Definition der Dichte als Ableitung der Verteilungsfunktion folgt

$$\frac{\partial u}{\partial s}(F(x, t), t)\rho(x, t) = \frac{\partial u}{\partial s}(F(x, t), t)\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = 1$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(F(x, t), t) + \frac{\partial u}{\partial s}(F(x, t), t)\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0.$$

Mit $s = F(x, t)$ folgt also

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) = \frac{1}{\rho(x, t)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(x, t)}{\rho(x, t)}.$$

Definieren wir nun die Geschwindigkeit in der Ortsvariable als

$$v(x, t) = V(s, t),$$

dann folgt aus $\frac{\partial u}{\partial t} = V$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \rho v = 0.$$

Um tatsächlich eine Gleichung für die Dichte zu erhalten differenzieren wir noch bezüglich x und folgern die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0. \quad (3.20)$$

Um eine Gleichung für v zu erhalten, berechnen wir

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial s}(F(x, t), t)\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial s}(F(x, t), t)\rho(x, t)$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(F(x, t), t) + \frac{\partial V}{\partial s}(F(x, t), t)\frac{\partial F}{\partial t}(x, t).$$

Aus den obigen Gleichungen können wir $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial s}$ und $\frac{\partial F}{\partial t}$ einsetzen und erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v - v^0}{\tau} - \tilde{c} \left(\frac{1}{\rho} - d \right)^{-e} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

3.4 Direkte Herleitung von Kontinuumsmodellen

Im Folgenden werden wir die fundamentale Gleichungen der Kontinuumsmechanik herleiten. Dabei werden wir besonderes Augenmerk auf die Gleichungen der Strömungsdynamik legen, für detaillierte Modelle der Festkörpermechanik verweisen wir auf die entsprechenden Vorlesungen zur Kontinuumsmechanik sowie auf [18].

Bei Strömungen handelt es sich um physikalische Massekontinua, d.h. Körper im euklidischen Raum, die als Menge ihrer Massepunkte aufgefaßt werden. Die Herleitung der Gleichungen der Strömungsdynamik beruht dann auf einigen wesentlichen physikalischen Grundprinzipien:

- Für alle Zeiten $t > 0$, existiert eine wohldefinierte Massendichte $\rho(x, t)$, sodaß die Masse $m(\Omega, t)$ in der Region Ω zum Zeitpunkt t gegeben ist durch

$$m(\Omega, t) = \int_{\Omega} \rho(x, t) dx$$

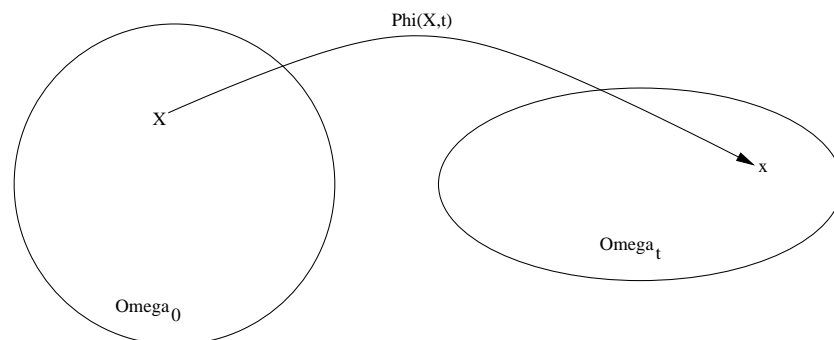
- Masse wird weder produziert noch vernichtet.
- Die Impulsänderung eines Fluidbereiches ist gleich den anliegenden Kräften (Newton's 2. Gesetz)
- Energie wird weder produziert noch vernichtet.

Diese Annahmen werden als *Kontinuumshypothese* sowie als *Erhaltung von Masse, Impuls und Energie* bezeichnet.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ das vom Fluid eingenommene Gebiet. Sei $x \in \Omega$ und wir betrachten den Fluidpartikel X , der sich zur Zeit t durch x bewegt. Man nennt x die *Euler-schen* Koordinaten zur Beschreibung des Massekontinuums und X die *Lagrangeschen* oder *materiellen* Koordinaten.

Sei nun $W_0 \subset \Omega$ ein Teilgebiet zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Funktion $\phi : W \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibt die Änderung der Partikelposition

$$W_t := \{\phi(X, t) : X \in W_0\} = \phi(W_0, t).$$



Für die Beschreibung der Strömung erweisen sich die folgenden Begriffe als nützlich:

- Die *Bahnlinie* ist die Menge der Raumpunkte $x(X_0, t)$, welche von einem Teilchen X_0 zu verschiedenen Zeiten t eingenommen wird.
- Die *Stromlinie* ist die Kurve, deren Tangente jeweils in Richtung des jeweiligen Geschwindigkeitsvektors zeigt.

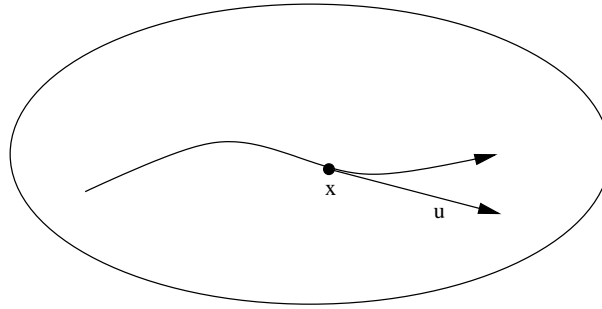
Bei stationären Strömungen fallen Bahnlinie und Stromlinie zusammen.

Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des Partikels mit $u(x, t)$. Für feste Zeiten t ist $u(x, t)$ ein Vektorfeld auf Ω . Dann ist

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \phi(X, t) \end{aligned}$$

die Partikelbahn und die Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(X, t), \quad \text{mit } x = \phi(X, t).$$



Die Beschleunigung a des Partikels kann mittels der Kettenregel berechnen:

$$\begin{aligned}
 a(x, t) &= \frac{d}{dt}u(x, t) = \frac{d}{dt}u(\phi(X, t), t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t}u(\phi(X, t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i}(\phi(X, t), t) \underbrace{\frac{\partial \phi_i}{\partial t}(X, t)}_{=u_i(x, t)} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \sum_{i=1}^3 u_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u.
 \end{aligned}$$

Das Symbol

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$$

heißt *Materialableitung*.

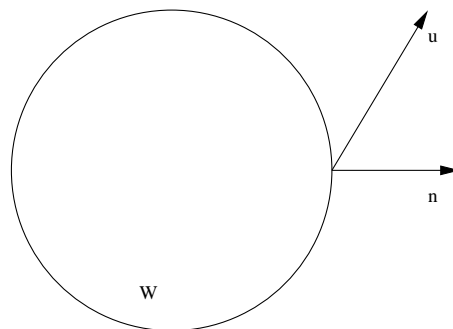
Massenerhaltung

In diesem Abschnitt sollen die die Folgerungen aus der Kontinuumshypothese und der Massenerhaltung untersucht werden.

Dafür fixieren wir ein Teilgebiet $W \subset \Omega$. Die Änderung der Masse in W ist

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}m(W, t) &= \frac{d}{dt} \int_W \rho(x, t) \, dx \\
 &= \int_W \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) \, dx
 \end{aligned}$$

Bezeichne mit ∂W den Rand von W und sei n die äußere Einheitsnormale, sowie dS das Flächenelement auf $\partial\Omega$.



Der Volumenstrom durch ∂W pro Einheitsfläche ist $u \cdot n$ und der zugehörige Massenstrom ist $\rho u \cdot n$. Der Gesamtmassenstrom durch ∂W ist dann

$$\int_{\partial W} \rho u \cdot n \, dS$$

Das Prinzip der Massenerhaltung besagt, dass die Änderung der Masse in W gleich dem Massenstrom über den Rand ∂W (nach Innen gerichtet) ist, oder in Formeln ausgedrückt.

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \, dV = - \int_{\partial W} \rho u \cdot n \, dS$$

Mit dem Satz von Gauß kann man dies schreiben als

$$\int_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right) dx = 0$$

Und da dies für jedes Teilgebiet W gilt, erhalten wir die differentielle Form der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad (3.21)$$

also dieselbe Identität die wir aus der Mittelung der Teilchenmechanik abgeleitet haben.

Ausgehend von der Funktion ϕ kann man die Massenerhaltung auch wie folgt in Formeln fassen

$$\int_{W_t} \rho(x, t) \, dx = \int_{W_0} \rho(X, 0) \, dx$$

Da der rechte Term unabhängig von t ist, ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(x, t) \, dx = 0$$

Doch nun kann man nicht mehr Differentiation und Integration vertauschen, da das Integrationsgebiet auch zeitabhängig ist. Dazu benötigen wir das folgende Resultat für F hinreichend glatt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{W_t} F(x, t) \, dx &= \int_{W_t} \frac{DF}{Dt} + F \operatorname{div} u \, dx \\ &= \int_{W_t} \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F \cdot u) \, dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dies ist das höherdimensionale Analogon der Formel für die Ableitung eines eindimensionalen Integrals mit parameterabhängigen Integranden und Integrationsgrenzen.

Mit (3.22) erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(x, t) \, dx \\ &= \int_{W_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \, dx \end{aligned}$$

und da dies für beliebige $W_0 \subset \Omega$ gilt, erhalten wir wieder die differentielle Form der Kontinuitätsgleichung.

Ob man die differentielle oder die integrale Form der Massenerhaltung benutzt hängt stark von der Regularität der Lösungen ab. Wir wollen im folgenden annehmen, daß die Lösungen hinreichend regulär sind, so daß alle obigen Manipulationen erlaubt sind.

Eine Konsequenz der Massenerhaltung ist das *Transporttheorem*: Sei $F = F(x, t)$ eine reguläre Funktion. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho F \, dx = \int_{W_t} \rho \frac{DF}{Dt} \, dx \quad (3.23)$$

Strömungen, bei denen das Volumen eines bewegten Teilgebiets konstant in der Zeit ist, sind von besonderer Bedeutung: Ein Fluid heißt *inkompressibel*, falls

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} dx = 0.$$

Es gibt verschiedene äquivalente Kriterien, die die Inkompressibilität sicherstellen: Ein Fluid ist inkompressibel, genau dann wenn $\operatorname{div} u = 0$, oder auch $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ gilt.

Impulserhaltung

Nun nutzen wir die Impulserhaltung zur Herleitung der zweiten Gleichung. Für den Impuls des Fluids verwenden wir das zweite Newton'sche Gesetz, d.h., die Impulsänderung ist gleich der Summe der wirkenden Kräfte.

Generell unterscheiden wir

Volumenkräfte:

$$\int_{W_t} \rho(x, t) f(x, t) \, dx,$$

für eine Kraftdichte $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$, z.B. Gravitation und

Oberflächenkräfte:

$$\int_{\partial W_t} \underbrace{n \cdot \tau(x, t)}_{=\sum_{j=1}^3 u_j \tau_{ij}} \, dS,$$

wobei $\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der Spannungstensor ist, der die innere Reibung bzw. den Druck beschreibt. Ferner bezeichne $n \cdot \tau$ den am Flächenelement angreifende Spannungsvektor.

Mit Newton und dem Satz von Gauß ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho u \, dx &= \int_{W_t} \rho f \, dx + \int_{\partial W_t} n \cdot \tau \, dS \\ &= \int_{W_t} \rho f \, dx + \int_{W_t} \operatorname{div} \tau \, dx \end{aligned}$$

mit der Zeilendivergenz $(\operatorname{div} \tau)_i := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$.

Mit dem Transporttheorem folgt wieder

$$\int_{W_t} \left(\rho \frac{Du}{Dt} - \rho f - \operatorname{div} \tau \right) dx = 0$$

Oder in differentieller Form

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f + \operatorname{div} \tau$$

bzw.

$$\frac{D}{Dt}(\rho u) + \rho u \operatorname{div} u = \rho f + \operatorname{div} \tau$$

oder in Erhaltungsform

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \rho f + (\operatorname{div} \tau).$$

Nun wollen wir den Spannungstensor näher spezifizieren. Wir machen die Annahmen:

- $\tau = -pI + \sigma$, $p \in \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
- σ hängt linear von ∇u ab.
- σ ist invariant unter Verschiebung und Drehung
- σ ist symmetrisch

Die ersten beiden Annahmen implizieren, daß der Spannungstensor für ruhende Fluide immer kugelsymmetrisch ist. Der Druck p wirkt deshalb immer in Richtung der Einheitsnormalen. Die Annahme letzte Annahme folgt aus der Drehimpulserhaltung, die wir nicht näher betrachtet haben.

Aus den Annahmen kann man ableiten, daß σ die Form

$$\sigma = \lambda(\operatorname{div} u)I + 2\mu D$$

hat, wobei λ (Volumenviskosität) und μ (Scherviskosität) Viskositätskoeffizienten sind und $D = (D_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ den *Deformationstensor* beschreibt

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

oder im Nablakalkül

$$D = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T).$$

Damit hat die Impulserhaltung die Form

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f - \nabla p + \mu_d \nabla(\operatorname{div} u) + \mu \Delta u$$

Der Term $\mu_d = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ heißt *Druckviskosität*.

In der Festkörpermechanik betrachtet man sehr häufig stationäre Situationen ohne Druck, beschrieben durch die Gleichung

$$-\operatorname{div} \sigma = \rho f,$$

mit geeigneten Spannungs-Verzerrungsrelationen der Form $\sigma = \sigma(D)$.

Navier-Stokes inkompressibel

Im Gegensatz zu Gasen lassen sich Flüssigkeiten nur unter Aufwendung von sehr großen Kräften zusammendrücken. Nehmen wir vereinfachend an, daß das Fluid inkompressibel ist. Dann gilt wie wir schon gesehen haben $\operatorname{div} u = 0$ und die Kontinuitätsgleichung wird zu einer Transportgleichung für die Dichte

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0.$$

Zusätzlich zur Inkompressibilität nehmen wir an, daß die Dichte konstant ist ($\rho = \rho_0 \equiv 1$). Dies ist z.B. typisch für Wasser oder Öl. Dann lauten die **inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen**

$$\left. \begin{aligned} u_t + \underbrace{(u \cdot \nabla)u}_{\text{Konvektion}} &= f - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \underbrace{\nu \Delta u}_{\text{Diffusion}} \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \Omega$$

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u(0) &= u_0 & \text{in } \Omega \end{aligned}$$

mit $\nu = \mu/\rho_0$. Da die Dichte konstant ist, benötigen wir keine weiteren Gleichungen.

Doch wie verhält sich die kinetische Energie der Flüssigkeit? Es ist (mit $\rho \equiv 1$)

$$E_{\text{kin}}(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Wir berechnen im Fall von verschwindenden Volumenkräften

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{kin}}(t) &= \int_{\Omega} u u_t dx \\ &= \int_{\Omega} u (-(u \cdot \nabla)u - \nabla p + \nu \Delta u) dx \\ &= - \int_{\Omega} u (u \cdot \nabla)u dx - \int_{\Omega} u \nabla p dx + \nu \int_{\Omega} u \Delta u dx \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\int_{\Omega} u \nabla p dx = - \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} u}_=0 p dx + \int_{\partial\Omega} p \cdot \underbrace{u \cdot n}_=0 dS = 0$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u (u \cdot \nabla)u dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \nabla(|u|^2) dx - \int_{\Omega} \underbrace{u \cdot (u \times \operatorname{rot} u)}_=0 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} u}_=0 |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \underbrace{u \cdot n}_=0 dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\frac{d}{dt} E_{\text{kin}}(t) = \nu \int_{\Omega} u \Delta u dx$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_{\text{kin}}(t) &= \nu \int_{\Omega} u_1 \Delta u_1 \, dx + \nu \int_{\Omega} u_2 \Delta u_2 \, dx + \nu \int_{\Omega} u_3 \Delta u_3 \, dx \\
&= \nu \sum_{i=1}^3 \left(- \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} u_i (\nabla u_i \cdot n) \, dS}_{=0} \right) \\
&= -\nu \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 \, dx \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Also ist die kinetische Energie monoton fallend, was Reibungsverlusten bei der viskosen Strömung entspricht.

Skalierung

Ausgehend von den dimensionsbehafteten inkompressiblen NSG wollen wir nun die Gleichungen durch eine geeignete Skalierung dimensionslos machen.

Wir starten mit den inkompressiblen Navier–Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned}
u_t + (u \cdot \nabla)u &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta u \\
\operatorname{div} u &= 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

und wählen eine charakteristische Länge L und eine charakteristische Geschwindigkeit U der Strömung. Eine sinnvolle Zeitskala ist dann durch $\tau = \frac{L}{U}$ gegeben.

Wir führen Variablen ein, die nun dimensionslos sind

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U}$$

Setzen wir dies in (3.24) ein und benutzen die Kettenregel, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{U}{\tau} \tilde{u}_t + \frac{U^2}{L} (\tilde{u} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{L} \tilde{\nabla} p + \frac{\nu U}{L^2} \tilde{\Delta} \tilde{u}, \\
\frac{U}{L} \operatorname{div} \tilde{u} &= 0
\end{aligned}$$

Skalieren wir noch den Druck mit $\tilde{p} = \frac{1}{\rho_0 U^2} p$, erhält man nach Multiplikation mit $\frac{L}{U^2}$

$$\begin{aligned}
u_t + (u \cdot \nabla)u &= -\nabla p + \frac{\nu}{LU} \Delta u \\
\operatorname{div} u &= 0,
\end{aligned}$$

wobei wir die Tilde weggelassen haben.

Der dimensionslose Parameter

$$\operatorname{Re} = \frac{LU}{\nu}$$

heißt *Reynoldszahl* und gibt ein objektives Maß für die Viskosität der Strömung.

Man erkennt, daß die Aussage “ ν ist klein” noch lange nicht erlaubt viskose Effekte zu vernachlässigen, falls L und/ oder U klein sind. Dies darf man erst, wenn $\frac{1}{\text{Re}}$ klein ist.

Ferner können zwei verschiedenen Strömungen dieselbe Reynoldszahl haben, d.h. sie werden durch dieselben Gleichungen beschrieben. Solche Strömungen nennt man *ähnlich*. Dieser Zusammenhang macht Tests in einem Windkanal erst möglich. Wir illustrieren dies Anhand der Umströmung von Kugeln mit den Beispielen

- *Strömung 1*: mit Radius $r = 10\text{m}$, mit der Geschwindigkeit $U_\infty = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und Viskosität ν
- *Strömung 2*: mit Radius $r = 1\text{m}$, mit der Geschwindigkeit $U_\infty = 1000\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Dann gilt

$$\text{Re}_1 = \frac{1(\frac{\text{km}^2}{\text{h}})}{\nu} = \text{Re}_2$$

Bei der Luftströmung um ein Auto sind die Parameter

$$U = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad L = 1\text{m}, \quad \nu_{\text{Luft}} = 10^{-5}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

und damit erhält man

$$\text{Re} = 10^6.$$

D.h. man kann viskose Effekte vernachlässigen, natürlich nur solange man nicht am Widerstandsbeiwert des Autos interessiert ist.

Bei Kleinstlebewesen in Wasser hat man

$$U = 1\frac{\text{mm}}{\text{s}}, \quad L = 1\text{mm}, \quad \nu_{\text{Wasser}} = 10^{-3}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

also

$$\text{Re} = 10^{-3},$$

sodass viskose Effekte dominant sind.