# Kapitel 1

# Einleitung

Die Herleitung, Analysis, numerische Simulation, mathematischer Modelle von realen Prozessen ist die Grundaufgabe der modernen angewandten Mathematik. Selbst wenn man sich nur für Teilaspekte davon interessiert, ist es meist wichtig, die Bedeutung und Struktur der zu Grunde liegenden mathematischen Modelle zu verstehen.

Als ein mathematisches Modell kann man grundsätzlich jede *berechenbare* (in deterministischem oder stochastischem Sinn) Menge mathematischer Vorschriften, Gleichungen und Ungleichungen bezeichnen, die einen Aspekt eines realen Vorgangs beschreiben sollen. Dabei sollte man sich von vornherein bewusst sein, dass es sich bei einem Modell immer um eine Vereinfachung handelt, und der reale Vorgang so gut wie nie in seiner vollen Komplexität beschrieben wird. Die erste Unterscheidung erfolgt in

- *qualitative Modelle,* d.h., Modelle, die prinzipiell die Struktur eines Prozesses beschreiben sollen und gewisse qualitative Voraussagen (etwa über langfristige Geschwindigkeit von Wachstum) ermöglichen sollen, aber keine expliziten Werte für die Variablen des Systems liefern.

- *quantitative Modelle,* d.h., Modelle, die für quantitative Voraussagen der Werte von gewissen Variablen benutzt werden sollen.

Qualitative Modelle verwendet man oft in den Wirtschaftswissenschaften (z.B. um die Dynamik der Preisbildung zu verstehen) und auch in manchen Naturwissenschaften wie der Ökologie (ein qualitatives Modell kann genügen um zu verstehen, ob sich ein ökologisches Gleichgewicht ausbildet oder ob es zu einer möglichen Katastrophe kommt). Für tatsächliche Vorhersagen aber quantitative Modelle, und auch wir werden uns im Laufe dieser Vorlesung mit solchen beschäftigen.

Bevor man ein mathematisches Modell entwickelt oder bestehende Modelle auf einen speziellen Prozess anwendet, sollte man sich Klarheit über die (Orts- und Zeit-) Skalen verschaffen, auf denen man den Prozess betrachtet, und jene Skalen, die darauf eine Einwirkung haben. So werden etwa für die Beschreibung einer Strassenbeleuchtung quantenmechanische Effekte kaum von Bedeutung sein, andererseits können zum Beispiel bei einer turbulenten Strömung sehr kleine Wirbel die gesamte Dynamik stark beeinflussen. Die Reduktion auf sogenannte *relevante Skalen* ist wichtig, um das Modell in einer sinnvollen Grösse zu halten, die dann auch eine numerische Simulation in akzeptabler Zeit erlaubt. Ebenso ist es wichtig, nur jene Effekte zu modellieren, die den Prozess auch tatsächlich beeinflussen, um das Modell und die Rechenzeit klein zu halten. Zum Beispiel könnte man bei der Modellierung einer Strömung auch die Wärmeleitung darin mitmodellieren. Da kleine Temperaturschwankungen aber vernachlässigbare Auswirkungen haben, wird man oft darauf verzichten, nur bei Prozessen mit starken Temperaturschwankungen (z.B. Gasturbinenbrennkammern) ist die Kopplung von Stömungs- und Wärmeleitungsmodellen unerlässlich. Die Kunst der mathematischen Modellierung besteht geradezu darin, ein möglichst einfaches Modell zu finden, dass eine reale Fragestellung möglichst gut erklärt.

Eine weitere Unterscheidung von mathematischen Modellen besteht in der Natur der Unbekannten,

- *Diskrete Modelle* bestehen aus einer endlichen Anzahl von Partikeln (Atome, Moleküle, Zellen, Händler, Autofahrer, ...), deren Eigenschaften (Position, Geschwindigkeit, Spin, Meinung, Investitionsverhalten, ...) durch das Modell beschrieben werden.

- *Kontinuumsmodelle* beschreiben die Dichten der Variablen, normalerweise als Funktionen von Ort und Zeit.

Wir werden in dieser Vorlesung beide Arten von Modellen kennenlernen und auch den Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Modellen diskutieren. Typischerweise haben diskrete Modelle eine Zufallskomponente, da man immer Ungenauigkeiten in der Beschreibung berücksichtigen muss (von der Unschärferelation der Quantenmechanik bis zu unplanbaren Eigenheiten von Händlern oder Autofahrern). Der Übergang zum Kontinuumsmodell besteht dann typischerweise aus dem Grenzwert *Anzahl gegen unendlich*, kann also vor allem für sehr viele Teilchen als vernünftige Näherung angenommen werden. Da bei diesem Grenzwert meist auch ein Gesetz der grossen Zahl auftritt, verschwindet die zufällige Komponente im Kontinuumsmodell.

Diese Vorlesung wird sich von vielen Lehrveranstaltungen (vor allem jenen des Grundstudiums) formal etwas unterscheiden, da wir hier weniger Augenmerk auf "exakte Mathematik" und Beweise legen, sondern eher versuchen unsere mathematischen Kenntnisse auf die Realität anzuwenden. Im Gegensatz zu einem rein mathematischen Problem kann man bei der mathematischen Modellierung auch nicht davon ausgehen, dass es eine "richtige" Antwort gibt, man kann nur versuchen aus einer Vielzahl von Möglichkeiten jene auszuwählen, die den gewünschten Zielen am ehesten genügt. Weiters werden wir viele Prinzipien nicht in allgemeingültigen Theoremen oder universellen Regeln diskutieren, sondern basierend auf speziellen Beispielen, da es meist keine allgemeingültigen Regeln für die Erstellung eines Modells gibt.

Mathematische Modelle werden heute in Gebieten verwendet, wo man es kaum vermuten würde, die Zunahme von Rechenleistung macht die quantitative Untersuchung immer neuer Phänomene möglich und attraktiv. Ein paar Beispiele von Gebieten, in denen mathematische Modelle eine Rolle spielen (und die wir teilweise auch in dieser Vorlesung / Übung kennen lernen werden), sind:

- *Physik:* die klassischste Form der mathematischen Modellierung, die theoretische Physik beschäftigt sich mit kaum anderen Themen als der Erstellung mathematischer Modelle für physikalische Prozesse.

- *Chemie:* von der einfachen Reaktionskinetik bis zur Quantenchemie werden heute unzählige chemische Prozesse mit mathematischen Modellen untersucht.

- *Biologie:* Die mathematischen Modelle in der Populationsbiologie haben bereits eine lange Geschichte und werden immer noch weiter entwickelt, etwa bezüglich nachhaltiger

Rohstoffnutzung oder der Ausbreitung von Viren und Krankheiten. Die mathematische Modellierung spielt auch in der Molekularbiologie eine zunehmend wichtige Rolle.

- *Medizin:* Diagnoseverfahren in der Medizin basieren auf der Lösung inverser Probleme, dahinter stecken natürlich wiederum mathematische Modelle. Dabei spielen natürlich viele physikalische, chemische, und biologische Effekte eine wichtige Rolle, z.B. elektrische Effekte beim EKG und EEG oder radioaktiver Zerfall in der Nuklearmedizin. Ein immer stärkerer Trend geht auch zur quantitativen Modellierung und Simulation in der Medizin, etwa des Blutflusses oder anderer physiologischer Prozesse. Auch Medikamente werden heute basierend auf mathematischen Modellen aus der Biomedizin designed.

- *Wirtschaft:* In den Wirtschaftswissenschaften werden schon lange relativ einfache mathematische Modelle verwendet, etwa zur Charakterisierung von Marktgleichgewichten. Verstärkt werden auch kompliziertere und realistische Modelle untersucht, zum Beispiel zur Verteilung von Wohlstand in Gesellschaften.

- *Finanz:* Die moderne Finanzwelt ist mittlerweile voll von komplexen stochastischen Modellen und nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Vor allem zur Berechnung der Preise von Finanzderivaten werden solche Modelle häufig eingesetzt.

- *Technik:* Von mechanischen Eigenschaften von Festkörpern über Strömungssimulation bis zu mikroelektronischen Bauteilen - die mathematische Modellierung und Simulation ist mit technischem Fortschritt heute untrennbar verbunden.

- *Transport:* In der Logistik hat die mathematische Optimierung basierend auf einfachen wirtschaftlichen Modellen eine lange Tradition, schon das klassische *travelling salesman problem* fällt in diese Kategorie. In der Verkehrsplanung hat die mathematische Modellierung im letzten Jahrzehnt grosse Erfolge erzielt, einige dieser Modelle werden wir auch in dieser Vorlesung kennen lernen.

- *Architektur:* In der Berechnung statischer Eigenschaften sind Architekten stets bemüht modernste mathematische Modelle der Mechanik zu verwenden. Neuerdings findet sich komplizierte Mathematik aber auch als Vorlage für künstlerisches Design und Architekten beginnen sich zunehmend mit mathematischen Modellen zur Evakuierungssimulation zu beschäftigen.

- *Sicherheit:* Durchleuchtungen auf Flughäfen basieren auf ähnlichen Verfahren und damit auch analogen mathematischen Modellen wie in der medizinischen Bildgebung. Seit 9/11 werden vor allem in den USA auch viele andere mathematische Modelle zur Terrorismusbekämpfung untersucht. Auch in der Kriminalitätsbekämpfung beginnt man mathematische Modelle einzusetzen, so wird derzeit z.B. in Los Angeles die Entstehung von Vierteln mit hoher Kriminalität modelliert.

- *Kunst:* da die Tonübertragung durch Akustik ein klassisches Thema der Physik ist, spielt die Mathematik in der Musik schon länger eine Rolle. Seit kurzem wird auch der Kompositionsstil klassischer Musiker und der Stil berühmter Maler mit mathematischen Modellen untersucht, letzteres vor allem zur Unterscheidung zu Fälschungen. Auch bei der Restoration antiker Kunstwerke spielt die Mathematik eine mittlerweile eine wichtige Rolle.

- *Unterhaltung:* Durch computergenerierte Special Effects in Hollywood-Filmen hat die Mathematik starken Einzug gehalten. Dabei gibt es eine etwas andere Anforderung als in den meisten anderen Anwendungsgebieten - die aus den Modellen entstehenden Simulationen sollen keine Realität abbilden, sondern vor allem realistisch aussehen. Andererseits sollte sich die Simulation der Modelle mit möglichst geringem Rechenaufwand realisieren lassen, um ainnvoll in einen Film integriert werden zu können.

- *Sport:* Mathematische Modelle sind heute in hochtechnologisierten Sportarten wie Formel 1 oder America's Cup Segeln (im zweimaligen Siegerteam der Alinghi sind auch Mathematiker der EPFL Lausanne vertreten) nicht mehr wegzudenken. Aber auch die Bewegungsanalyse und Trainingsplanung in anderen Sportarten basiert heute auf mathematischen Modellen. Die eventuelle Überschneidung zum Medikamentendesign wollen wir hier einmal ignorieren.