Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 8, Abgabe bis 11.06.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Randschichten*

   (a) Betrachten Sie ein Randwertproblem der Differentialgleichung

   $$\varepsilon u'' + u' = 0 \ , \qquad u(0) = 0 \ , \qquad u(1) = 1 \ ,$$

   mit $\varepsilon > 0$. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung und schauen Sie sich die Randschicht genauer an, indem Sie die Skalierung $y = \frac{x}{\varepsilon}$ verwenden.

   (b) Betrachten Sie in (a) die allgemeinen Randbedingungen

   $$u(0) = a \ , \qquad u(1) = b \ , \qquad a, b \in \mathbb{R} \ .$$

   Bestimmen Sie a und b so, dass bei der Lösung keine Randschicht auftritt.

2. *Fokker-Planck-Gleichung, Entropiedissipation*
   Sei ρ eine Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

   $$\rho_t = \nabla \cdot (D(\nabla\rho + \rho\nabla V)) \ ,$$

   wo D eine positiv definite Matrix ist und $\int \rho \, dx = 1$ gilt, und

   $$\rho_\infty = \frac{e^{-V}}{\int e^{-V} \, dx}$$

   eine stationäre Lösung, falls sie existiert. Betrachten Sie weiterhin die relative Entropie

   $$E(\rho \,|\, \rho_\infty) = \int \rho_\infty \, f\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right) \, dx \ ,$$

   die einen verallgemeinerten Abstand zwischen ρ und ρ_∞ darstellt.

   (a) Zeigen Sie: Ist f konvex, so gilt

   $$\frac{d}{dt} \, E(\rho \,|\, \rho_\infty) \ \leq \ 0 \ .$$

   (b) Zeigen Sie, dass die relative Entropie im Spezialfall $f(\rho) = \rho \log \rho$ die Darstellung

   $$E(\rho \,|\, \rho_\infty) = \int \rho \log \rho + \rho V \, dx + c \ , \qquad c \in \mathbb{R} \ ,$$

   besitzt.

3. *Programmieraufgabe: 1D Diffusionsgleichung*
   Implementieren Sie eine Finite-Differenzen Methode zur Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

   $$\rho_t = \rho_{xx} \ , \qquad x \in (0,1) \ , \qquad t > 0 \ .$$

   Zum Test des Verfahrens verwenden Sie die Werte

   $$\rho(0,t) = \rho(1,t) = 0 \qquad \text{und} \qquad \rho(x,0) = 1 - |1 - 2x| \ .$$

   Zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung verwenden Sie ein explizites Schema

   $$\frac{\rho(x_i, t_{j+1}) - \rho(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{\rho(x_{i-1}, t_j) - 2\rho(x_i, t_j) + \rho(x_{i+1}, t_j)}{(\Delta x)^2}$$

   und ein rein implizites Schema

   $$\frac{\rho(x_i, t_{j+1}) - \rho(x_i, t_j)}{\Delta t} = \frac{\rho(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2\rho(x_i, t_{j+1}) + \rho(x_{i+1}, t_{j+1})}{(\Delta x)^2}$$

   mit jeweils $\Delta x = 0.0145, \ \Delta t = 0.0001$ und $\Delta x = 0.013748, \ \Delta t = 0.0001$.

4. *Programmieraufgabe: 2D Diffusionsgleichung (Abgabe bis 18.06.2008)*
Implementieren Sie eine Finite-Differenzen Methode zur Lösung der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\rho_t = \Delta\rho = \partial_{x_1}^2\rho + \partial_{x_2}^2\rho \ , \qquad \Omega = (-1,1)^2 \ , \qquad t > 0 \ .$$

Verwenden Sie zur Diskretisierung der Gleichung die ADI-Methode von *Douglas-Rachford*

$$\begin{aligned} (I - \Delta t A_{1h})\rho^{k+\frac{1}{2}} &= (I + \Delta t A_{2h})\rho^k \\ (I - \Delta t A_{2h})\rho^{k+1} &= \rho^{k+\frac{1}{2}} - \Delta t A_{2h}\rho^k \ , \end{aligned}$$

wo die Matritzen A_{1h} und A_{2h} die Operatoren $A_1 = \partial_{x_1}^2$ und $A_2 = \partial_{x_2}^2$ approximieren. Zum Test des Verfahrens nehmen Sie die Werte

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= 0 & , \qquad & x \in \partial\Omega \ , t \geq 0 \ , \\ \rho(x,0) &= e^{-50|x+0.5|^2} + e^{-50|x-0.5|^2} & , \qquad & x \in \Omega \ . \end{aligned}$$