Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 7, Abgabe bis 04.06.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Mehrdimensionale partielle Integration*
   Gegeben sind ein glattes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial\Omega$ und eine glatte Funktion $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß
   $$\int_\Omega \nabla \cdot \tau(x)\; dx = \int_{\partial\Omega} \tau(x)\, n(x)\; d\sigma \;,$$
   wobei $\nabla\cdot$ die Divergenz und n den Normalenvektor auf $\partial\Omega$ bezeichnet und die Divergenz einer Matrix durch die Zeilendivergenz $(\nabla \cdot \tau)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ definiert ist.

2. *Reynolds'sche Transport-Theorem*
   Wir betrachten die Bewegung einer Fluidmenge, die sich zum Zeitpunkt t im Gebiet $W(t)$ befindet. In Abhängigkeit von $W(0)$ ist $W(t)$ gegeben durch
   $$W(t) = \{X(x,t) \;:\; x \in W(0)\}$$
   mit einer Funktion $X : W(0) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$, die die Änderung der Partikelposition beschreibt und durch Lösen der Anfangswertaufgabe
   $$\frac{\partial X}{\partial t}(x,t) = u(X(x,t),t) \;, \qquad X(x,0) = x \;,$$
   ermittelt wird, wobei u das Geschwindigkeitsfeld des Partikels ist. Weiterhin sei $F = F(X,t)$ eine glatte Funktion, dann folgt aus der Substitutionsregel
   $$\int_{W(t)} F(X,t)\; dX = \int_{W(0)} F(X(x,t),t)\, J(x,t)\; dx$$
   mit der Funktionaldeterminante $J(x,t) = \det\left(\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\right)$, die die Volumenänderung des Gebietes
   $$|W(t)| = \int_{W(t)} dX = \int_{W(0)} J(x,t)\; dx \;.$$
   beschreibt. Für die Funktionaldeterminante gilt dabei die *Euler'sche Entwicklungsformel*
   $$\frac{\partial J}{\partial t}(x,t) = \nabla_X \cdot u(X,t)_{|X=X(x,t)} J(x,t) \;.$$
   Zeigen Sie mit Hilfe der Euler'schen Entwicklungsformel das *Reynolds'sche Transport-Theorem*
   $$\frac{d}{dt} \int_{W(t)} F(X,t)\; dX = \int_{W(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(X,t) + \nabla_X \cdot (F(X,t)\, u(X,t))\right]\; dX \;.$$

3. *Programmieraufgabe*
   Implementieren Sie eine Finite-Differenzen Methode zur Lösung der eindimensionalen Kontinuitätsgleichung
   $$\partial_t \rho + \partial_x(u\rho) = 0 \;, \qquad x \in [-1,0] \;, \quad t \in (0,1) \;.$$
   Zum Test des Verfahrens verwenden Sie den Anfangswert
   $$\rho(x, t=0) = \frac{10}{\sqrt{2\pi}} e^{-50(x+0.5)^2} \;, \qquad x \in [-1,0] \;,$$
   und die Geschwindigkeit $u(x) = 1 + 2x$. Zur Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung verwenden Sie ein Upwind-Finite-Differenzen Verfahren, d.h.
   $$\begin{aligned}\frac{\rho(x_i,t_{j+1}) - \rho(x_i,t_j)}{\Delta t} &+ \max\{u(x_i),0\}\frac{\rho(x_i,t_j) - \rho(x_{i-1},t_j)}{\Delta x} \\ &+ \min\{u(x_i),0\}\frac{\rho(x_{i+1},t_j) - \rho(x_i,t_j)}{\Delta x} + u'(x_i)\rho(x_i,t_j) = 0 \;.\end{aligned}$$