Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 6, Abgabe bis 28.05.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

Lösung partieller Differentialgleichungen mit der Methode der Charakteristiken

Partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung können mit der Charakteristiken-Methode gelöst werden. Eine Charakteristik ist eine Lösung u einer partiellen Differentialgleichung entlang einer Kurve $t \mapsto x(t)$ und kann durch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die Funktion $t \mapsto z(t) = u(t, x(t))$ bestimmt werden. Betrachtet man eine Anfangswertaufgabe, so wird für jeden Punkt der Anfangskurve eine Charakteristik durch diesen Punkt bestimmt. Fügen sich diese Charakteristiken zu einer Fläche zusammen, so wird dies eine Lösungsfläche der partiellen Differentialgleichung.

1. *Charakteristiken-Methode für die eindimensionale Kontinuitätsgleichung*
   Wir verwenden die Charakteristiken-Methode zur Lösung der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 , \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} , \\ \rho &= \rho_0 , \qquad t = 0 ,\ x \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

   Dazu bestimmen wir die Lösung von

$$\frac{d}{dt} s(t,y) = v(t, s(t,y)) , \qquad s(0,y) = y \tag{1}$$

   für alle $y \in \mathbb{R}$ und setzen $z(t,y) := \rho(t, s(t,y))$.

   (a) Es sei $s(t,y)$ die Lösung von (1) und $\rho(t,x)$ eine Lösung der Kontinuitätsgleichung. Zeigen Sie, dass $t \mapsto z(t,y)$ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\frac{d}{dt} z(t,y) = -\partial_x v(t,x)_{|x=s(t,y)} z(t,y) , \qquad z(0,y) = \rho_0(y) . \tag{2}$$

   (b) Sei nun $v(t,x) = x/(t+1)$ und $\rho_0(x) = 1 - \tanh(x)$. Lösen Sie die Anfangswertprobleme (1) und (2).

2. *Charakteristiken-Methode für die mehrdimensionale Transportgleichung*
   Gegeben ist die Transportgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + v \cdot \nabla u &= f , \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n , \\ u &= u_0 , \qquad t = 0 ,\ x \in \mathbb{R}^n , \end{aligned} \tag{3}$$

   mit bekanntem Geschwindigkeitsfeld $v(t,x)$ und bekanntem Quellterm $f(t,x)$. Für $f \equiv 0$ entspricht die Gleichung der Kontinuitätsgleichung im inkompressiblen Fall, d.h. bei $\nabla \cdot v = 0$.

   (a) Es sei $s(t,y)$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt} s(t,y) = v(t, s(t,y)) , \qquad s(0,y) = y$$

   und $u(t,x)$ eine Lösung von (3). Zeigen Sie, dass $z(t,y) = u(t, s(t,y))$ die Charakteristikengleichung

$$\frac{d}{dt} z(t,y) = f(t, s(t,y))$$

   löst. Ermitteln Sie daraus eine Darstellung der Lösung von (3).

   (b) Lösen Sie (3) für

$$v(t,x) = (1,\ x_3,\ -x_2)^T , \qquad f(t,x) = e^{-(t+x_1+x_2^2+x_3^2)} \qquad \text{und} \qquad u_0(x) = 0 .$$

3. *Erhaltung des Massenmittelpunktes*

(a) Gegeben sind der Massenmittelpunkt

$$S(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i(t)$$

des Teilchenmodells mit N Massenpunkten und

$$\rho^N(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} m_i \delta(x - x_i(t)) \ ,$$

wo δ die Delta-Distribution ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$S(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x \ \rho^N(x,t) \ dx \ .$$

(b) Gegeben ist ein Vektorfeld

$$v(x,t) = \nabla_x f(\rho(x,t))$$

mit einer monoton wachsenden Funktion f. Die Dichte ρ löst die Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) &= 0 \ , \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \ , \\ \rho &= \rho_0 \ , \qquad t = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit der Bedingung

$$\rho(x,t) \to 0 \qquad \text{für} \qquad ||x|| \to \infty \ .$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \ \rho(x,t) \ dx = \int_{\mathbb{R}^n} x \ \rho_0(x) \ dx \ , \qquad \forall t \geq 0 \ ,$$

d.h. also, dass der Massenmittelpunkt über die Zeit erhalten bleibt.

Hinweis: Definieren Sie sich eine Funktion F, die durch die Gleichung

$$F'(\rho) = \rho f'(\rho)$$

bestimmt wird, und nehmen Sie an, dass es $F(0) = 0$ erfüllt.