Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 5, Abgabe bis 21.05.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Schwache Lösung*
   Wir betrachten ein vereinfachtes Verkehrsmodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \ , \\ \dot{v}_i &= 1 \ . \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die empirische Dichte im Phasenraum

$$f^N : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} \ , \qquad f^N(x,v,t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i(t))\delta(v - v_i(t))$$

   eine schwache Lösung von

$$\partial_t f^N + v\, \partial_x f^N + \partial_v f^N = 0$$

   ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die empirische Dichte im Ort

$$\rho^N(x,t) := \int_{\mathbb{R}^3} f^N(x,v,t)\ dv$$

   eine schwache Lösung von

$$\partial_t \rho^N + \partial_x(\rho^N V^N) = 0$$

   mit

$$(\rho^N V^N)(x,t) := \int_{\mathbb{R}^3} v f^N(x,v,t)\ dv$$

   ist.

2. *Programmieraufgabe*
   Implementieren Sie ein Verfahren Ihrer Wahl zur Lösung der skalierten Bewegungsgleichung für das Verkehrsmodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= v_i \ , \\ \dot{v}_i &= \frac{v_i^0 - v_i}{\tau_i / T} - \frac{a_i T}{V}(x_{i+1} - x_i - d_i)^{-c_i} \ . \end{aligned}$$

   Testen Sie Ihr Verfahren mit den typischen Werten

$$L = 500\,[\mathrm{m}] \ , \qquad V = 120\,[\mathrm{km/h}] \ .$$

   Zur Vereinfachung nehmen Sie an, dass sich alle Fahrer auf die gleiche Art und Weise verhalten, d.h. es gilt

$$c_i = 1 \ , \qquad v_i^0 = 140\,[\mathrm{km/h}] \ , \qquad \tau_i = 1\,[\mathrm{s}] \ , \qquad a_i = 3.86\,[\mathrm{m/s^2}] \qquad \forall i \ .$$

   Als Startwerte wählen sie zufällig 30 Fahrzeuge im skalierten Intervall $[0,1]$, wo sich 20 davon in der ersten Hälfte des Intervall befinden. Die skalierten Anfangsgeschwindigkeit ist $v_i(0) = 1 \ , \ \forall i$.

Schöne Pfingstferien!

Und wenn Sie ins Stau kommen sollten, denken Sie an Aufgabe 2!