Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 4, Abgabe bis 07.05.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Mehrdimensionale partielle Integration*
   Gegeben sind ein glattes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial\Omega$ und glatten Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß

   (a) $\displaystyle\int_\Omega f(x)\ \nabla \cdot u(x)\ dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\ u(x) \cdot n(x)\ d\sigma - \int_\Omega \nabla f(x) \cdot u(x)\ dx\ ,$

   (b) $\displaystyle\int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\ dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\ \nabla g(x) \cdot n(x)\ d\sigma - \int_\Omega f(x)\ \Delta g(x)\ dx\ ,$

   wobei $\nabla\cdot$ die Divergenz, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ den Laplace-Operator und n den Normalenvektor auf $\partial\Omega$ bezeichnet.

2. *Zwei-Körper-Problem*
   Wir wollen die Bewegung eines Planeten der Masse m_P um eine Sonne der Masse m_S beschreiben. Dazu seien $r_P(t)$ und $r_S(t)$ die Positionen von Planeten und Sonne und

   $$r(t) = r_P(t) - r_S(t)$$

   der Abstand zwischen Sonne und Planeten.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für Sonne und Planeten auf. Berechnen Sie die kinetische Energie

   $$E_{\text{kin}} = \sum_i m_i \frac{|r_i'|^2}{2}$$

   und die potentielle Energie

   $$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j V_{ij}(|r_i - r_j|)\ ,$$

   wobei V_{ij} eine Stammfunktion von H_{ij} ist, und verifizieren Sie, dass die Gesamtenergie

   $$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

   eine Erhaltungsgröße ist.

   (b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegung der Erde um die Sonne durch die Gleichung

   $$m_P r''(t) = -G_0 m_P m \frac{r(t)}{|r(t)|^3} \tag{1}$$

   mit der Gravitationskonstante G_0 und der Gesamtmasse $m = m_S + m_P$ beschreiben lässt.

3. *Kepler'sche Gesetze*
   Wir beschreiben mit der Funktion

   $$t \mapsto x(t) = x_P(t) - x_S\ ,$$

   die Bahn des Planeten relativ zur Sonne und vernachlässigen die Bewegung der Sonne. In der Aufgabe 2 und auf dem Blatt 3 haben wir schon gezeigt, dass die Energie und der Drehimpuls,

   $$E = \frac{-G_0 m_P m}{|x|} + \frac{m_P}{2}|x'|^2 \qquad \text{bzw.} \qquad L = m_P\, x \times x'\ ,$$

   Erhaltungsgrößen sind. Mit Hilfe der Polarkoordinaten

   $$x = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{2}$$

lässt sich aus den Erhaltungssätzen das folgende System herleiten:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{|L|}{m_P} , \tag{3}$$

$$(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2 - 2\frac{G_0 m}{r} = 2\frac{E}{m_P} . \tag{4}$$

(a) Betrachten Sie r als Funktion von φ und zeigen Sie, dass

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad \text{mit} \qquad p = \frac{|L|^2}{G_0 m m_P^2} , \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E|L|^2}{G_0^2 m^2 m_P^3}}$$

den Gleichungen (3) und (4) genügt.

(b) Wir betrachten den Fall $e < 1$. Beweisen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten (2) das 1. Kepler'sche Gesetz: Der Planet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne. Leiten Sie dazu die Ellipsengleichung

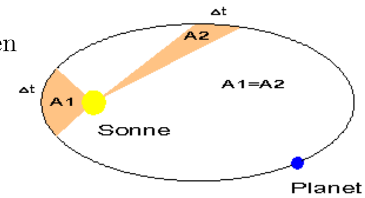
$$\frac{(x_1 + ea)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

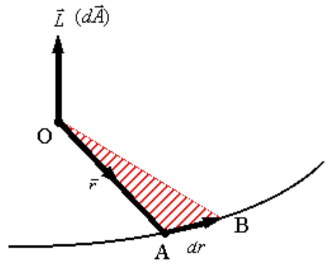
mit geeigneten Konstanten a, b her.

Hinweis: e ist die numerische Exzentrizität, d.h. es gilt $e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$.

(c) Beweisen Sie das 2. Kepler'sche Gesetz:
Der Abstandsvektor x überstreicht in einem gegebenen Zeitintervall Δt stets die gleiche Fläche $A_{\Delta t}$. Nutzen und begründen Sie, dass für $\Delta t = t_2 - t_1$ gilt

$$A_{\Delta t} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |x(t) \times x'(t)|\, dt .$$





Hinweis: Betrachten Sie dafür die Bahn dx des Planeten für eine Zeitgröße dt. Ist dt klein genug, so entspricht die überstrichene Fläche einem Dreieck + einer Fläche, die vernachlässigt werden kann.

4. *Programmieraufgabe*
Nach einer Skalierung von (1) erhalten wir folgende Differentialgleichung

$$r''(t) = -\frac{r(t)}{|r(t)|^3} .$$

Implementieren Sie ein Verfahren Ihrer Wahl zur Lösung dieser Gleichung. Testen Sie Ihr Verfahren an den folgenden (skalierten) Anfangswerten: Wir nehmen an, dass die x_1-Achse genau einer Verbindungslinie zwischen der Sonne und der Erde entspricht, wo die Erde den maximalsten Abstand zur Sonne besitzt, und nehmen die Position der Erde mit der größten Entfernung zur Sonne als Startpunkt. Damit gilt

$$r(0) = \begin{pmatrix} 0.2988 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

In diesem Punkt besitzt die Erde wegen dem 2. Kepler'schen Gesetz die minimalste Geschwindigkeit und wir erhalten

$$r'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.8144 \end{pmatrix} .$$

Dabei entspricht in der skalierten Differentialgleichung das Zeitintervall $[0, 1]$ einem Jahr in der ursprünglichen Differentialgleichung (1).