Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 3, Abgabe bis 30.04.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Skalierung und Sensitivitätsanalyse I*
   Wir betrachten ein Sparbuch mit täglicher Verzinsung, täglicher Zinssatz $r = 0,01\%$, auf dem $K(0) = 5000$ EUR veranlagt werden.

   (a) Skalieren Sie die Verzinsungsformel

   $$K(t+1) = \left(1 + \frac{r}{100}\right) K(t) \ , \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

   für das Kapital $K(t)$, wobei die typische Zeitskala ein Jahr und die typische Geldmenge 5000 EUR sind.

   (b) Leiten Sie aus dem skalierten Modell eine approximierende gewöhnliche Differentialgleichung her.

   (c) Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse für das Kapital nach 3 Jahren bezüglich des Zinssatzes durch.

2. *Skalierung und Sensitivitätsanalyse II*
   Ein Kommissar möchte den Todeszeitpunkt eines Mordopfers feststellen. Dafür misst er die Temperatur des Opfers um 15.36, sie beträgt 27 °C. Nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz ist die Abkühlung eines Körpers (negative Temperaturänderung pro Zeit) proportional zur Differenz von Körpertemperatur und Umgebungstemperatur. Leider kennt der Kommissar die Proportionalitätskonstante nicht. Deshalb misst er die Temperatur um 16.06 erneut, sie beträgt 25 °C. Die Aussentemperatur beträgt 20 °C und kann als konstant angenommen werden, die Körpertemperatur zum Todeszeitpunkt wird mit 37 °C angesetzt.

   (a) Wann fand der Mord statt?

   (b) Skalieren Sie das Modell und führen Sie eine Sensitivitätsanalyse für die Mordzeit bezüglich der Körpertemperatur zum Mordzeitpunkt durch.

3. *Stationäre Lösung und Stabilitätsanalyse*
   Das Gleichgewicht des folgenden Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

   $$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}(t) &= -k_+ L(t)M(t) + k_- N(t) \\ \frac{dM}{dt}(t) &= -k_+ L(t)M(t) + k_- N(t) \\ \frac{dN}{dt}(t) &= k_+ L(t)M(t) - k_- N(t) \end{aligned}$$

   ist beschrieben durch

   $$k_+ L_\infty M_\infty = k_- N_\infty \ .$$

   (a) Bestimmen Sie L_∞, M_∞ und N_∞, wobei bei gegebenem Anfangszustand nur Lösungen mit

   $$L_\infty + N_\infty = L(0) + N(0) \ , \qquad M_\infty + N_\infty = M(0) + N(0) \ .$$

   betrachtet werden.

   (b) Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse durch.

4. *Newton'sche Bewegungsgleichung und Erhaltungsgrössen*
   Gegeben sind die einzelnen Drehimpulse L_i und die einzelnen Drehmomente M_i wie im Skriptum. Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $L = \sum_i L_i$ eine Erhaltungsgrösse ist, d.h. es gilt

   $$\frac{dL}{dt} = \sum_i M_i \ .$$