Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 2, Abgabe bis 23.04.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Schwache Lösung*
   Zeigen Sie, dass die Dichte
   $$q(x, y, z, t) = \delta(x - X(t))\delta(y - Y(t))\delta(z - Z(t))$$
   eine schwache Lösung von
   $$\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot \left((\tilde{k}_+ xy - \tilde{k}_- z) q (1, 1, -1)^T \right)$$
   ist, wobei $\nabla\cdot$ die Divergenz bezeichnet. Die Dirac δ-Distribution ist dabei definiert durch
   $$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - a)\varphi(x)\, dx = \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in C(\mathbb{R}) \ , \ a \in \mathbb{R} \ ,$$
   und das Tripel $(X(t), Y(t), Z(t))$ durch das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen
   $$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t) &= -\tilde{k}_+ X(t)Y(t) + \tilde{k}_- Z(t) \\ \frac{dY}{dt}(t) &= -\tilde{k}_+ X(t)Y(t) + \tilde{k}_- Z(t) \\ \frac{dZ}{dt}(t) &= \tilde{k}_+ X(t)Y(t) - \tilde{k}_- Z(t) \ . \end{aligned}$$

2. *Gleichgewichtsgleichung*
   Das Gleichgewicht des folgenden Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen
   $$\frac{dL}{dt}(t) = -k_+ L(t)M(t) + k_- N(t) \tag{1}$$
   $$\frac{dM}{dt}(t) = -k_+ L(t)M(t) + k_- N(t) \tag{2}$$
   $$\frac{dN}{dt}(t) = k_+ L(t)M(t) - k_- N(t) \tag{3}$$
   ist beschrieben durch
   $$k_+ L_\infty M_\infty = k_- N_\infty \ .$$
   (a) Bestimmen Sie L_∞, M_∞ und N_∞, wobei bei gegebenem Anfangszustand nur Lösungen mit
   $$L_\infty + N_\infty = L(0) + N(0) \ , \qquad M_\infty + N_\infty = M(0) + N(0) \ .$$
   betrachtet werden.
   (b) Führen Sie eine lineare Stabilitätsanalyse durch.

3. *Programmieraufgabe: gewöhnliche Differentialgleichungen*
   (a) Implementieren Sie ein Verfahren Ihrer Wahl zur Lösung des Systems (1) - (3) mit den Anfangswerten $L(0), M(0)$ und $N(0)$. Dafür können Sie natürlich auch einen in Matlab vordefinierten Löser benutzen.
   (b) Testen Sie Ihr Verfahren in dem Zeitintervall $[0, 2]$ mit den Anfangswerten
   $$L(0) = 800 \ , \quad M(0) = 1550 \ , \quad N(0) = 1300$$
   und den Reaktions-/Zerfallsraten
   $$k_+ = 0.001, \ k_- = 5 \qquad \text{und} \qquad k_+ = 0.01 \ , k_- = 0.001 \ .$$
   (c) Ploten Sie zusätzlich den logarithmischen l_2-Fehler über die Zeit zwischen der numerischen Lösung und der stationären Lösung $\mathbf{x}_\infty$ aus Aufgabe 2.