Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 1, Abgabe bis 16.04.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Dimensionslose Variable und Skalierung*
   Betrachten Sie den Flug eines Teilchens, das auf einer Ebene mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ abgeschossen wird und eine Ladung Q besitzt. Weiterhin ist im Punkte $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ eine fixe Ladung $Q_{\mathbf{P}}$ angebracht. Es gilt $QQ_{\mathbf{P}} < 0$, d.h. sie ziehen sich an.

   (a) Entwickeln Sie ein mathematisches Modell. Benutzen Sie dafür die Newton'sche Bewegungsgleichung aus dem Skriptum mit der Kraft

   $$F(\mathbf{x}) = F_R\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) + F_C(\mathbf{x}) \ .$$

   Dabei ist $F_R(\mathbf{v}) = -\lambda \mathbf{v}$, $\lambda > 0$, die vereinfachte Reibungskraft und F_C die Coulomb-Kraft mit

   $$F_C(\mathbf{x}) = -k_C \ (QQ_{\mathbf{P}}) \ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{P}}{||\mathbf{x} - \mathbf{P}||^3}$$

   und Coulomb-Konstante $k_C > 0$.

   (b) Wählen Sie eine geeignete Skalierung und überführen Sie das Modell in eine dimensionslose Form.

2. *Sensitivitätsanalyse*
   Nehmen Sie in das Modell aus Aufgabe 1 die Ortskoordinaten des Teilchens zu einem gewissen Zeitpunkt als Output rein. Führen Sie eine Sensitivitätsanalyse bezüglich einer Änderung der Ladung Q durch, d.h. leiten Sie eine Gleichung für $\dfrac{\partial y}{\partial Q}$ her.

3. *Langzeitskalierung*
   Wählen Sie das Modell wie in Aufgabe 1, wo aber statt der Coulomb-Kraft eine konstante Kraft F_C wirkt.

   (a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe aus Aufgabe 1.

   (b) Wählen Sie die typische Zeitskala $\tau \gg 1$ so, dass für die transformierte Zeit

   $$\tilde{t} = \tau^{-1} t \approx \mathcal{O}(1)$$

   gilt. Zeigen Sie, dass man für $\tau \to \infty$ die Gleichung

   $$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lambda^{-1} F_C$$

   erhält. Lösen Sie die Differentialgleichung und vergleichen sie mit der Lösung in (a).