Übung zur Mathematischen Bildverarbeitung

Übungsblatt 9, Abgabe bis 14.06.2007, 12 Uhr

1. *Morphologische Operatoren: Dilatation und Erosion*
   Sei S ein Kreis mit Radius ε. Dann kann die Dilatation einer Menge A folgendermaßen definiert werden
   $$D_S(A) = \{x + \varepsilon n | x \in A\}$$
   wobei n den Normalvektor am Kreis bezeichnet. Es gilt dann
   $$x_n - x_a = \varepsilon n \quad x_n \in D(A), x_a \in A$$
   und für $\varepsilon \to 0$
   $$\dot{x} = n(x).$$
   Zeigen sie dass in diesem Grenzwert die Dilatation äquivalent zur Differentialgleichung
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = -|\nabla u|$$
   ist.
   Wie würde die analoge Gleichung für die Erosion aussehen ?

2. Wir betrachten die Gleichung
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla u)$$
   Zeigen sie das die explizite FD-Diskretisierung
   $$\begin{aligned} u_{ij}^k = &\left(1 - \frac{\tau}{h^2}\left(2D_{11} + 2D_{22} - D_{12}\right)\right) u_{ij}^k \\ &+ \frac{\tau}{h^2}\left(D_{11} u_{i+1j}^k + D_{22} u_{ij+1}^k + D_{22} u_{ij-1}^k + \left(D_{11} - D_{12}\right) u_{i-1j}^k\right) \\ &+ \frac{\tau}{h^2}\left(D_{12} u_{ij+1}^k + D_{12} u_{i-1j-1}^k\right) \end{aligned}$$
   mit D symmetrisch positiv definite und $D_{11} \geq D_{12} \geq 0$, monoton ist.

3. *Programmierbeispiel I:*
   Implementieren sie das Verfahren aus Beispiel 2 in Matlab. Testen Sie ihr Programm für
   $$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$
   wobei $\alpha \in [0, 1]$.

4. *Programmierbeispiel II: Coherence-Enhancing Anisotropic Diffusion*
   Wir betrachten die Gleichung
   $$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D\left(J_\rho\left(\nabla u_\rho\right)\right) \nabla u\right) && \text{in }]0, T] \times \Omega \\ &u(0, x) = u_0(x) && \text{in } \Omega \\ &\left\langle D\left(J_\rho\left(\nabla u_\rho\right)\right) \nabla u, N\right\rangle = 0 && \text{auf }]0, T] \times \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $u_\sigma(x) = (k_\sigma * u)(x)$ und einer positiv semidefiniten Matrix

$$J_\rho(\nabla u_\sigma) = k_\rho * \left(\nabla u_\sigma \nabla u_\sigma^t\right).$$

Hier bezeichnet k_σ einen Gaußscher oder Linearer Filter. Die Eigenwerte des Operators D werden folgendermaßen konstruiert

$$\lambda_1 = \alpha$$
$$\lambda_2 = \begin{cases} \alpha & \text{if } \mu_1 = \mu_2 \\ \alpha + (1-\alpha)e^{\frac{-1}{(\mu_1-\mu_2)^2}} & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei μ_1, μ_2 die Eigenwerte von $J_\rho(\nabla u_\sigma)$ sind und $\alpha \in (0,1)$. Wählen sie die Eigenvektoren des Operators D gleich jenen der Matrix J_ρ.
Schreiben sie ein Matlab Programm welches die obige Gleichung explizit löst. Testen sie Ihr Programm für die auf der Homepage zur Verfügung gestellten Bilder.