Übung zur Mathematischen Bildverarbeitung

Übungsblatt 7, Abgabe bis 24.05.2007, 12 Uhr

1. *Kantenkorrektur*
   Zeigen sie dass
   $$\frac{\nabla u}{|\nabla u|}^{\perp} \cdot \left(D^2 u \frac{\nabla u}{|\nabla u|}^{\perp} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) |\nabla u|$$
   in 2D gilt. Hier bezeichnet $D^2 u$ die Hesse Matrix und $\nabla u^{\perp}$ steht orthogonal auf ∇u.

2. *Perona-Malik Model in 1D*
   Wir betrachten das Perona-Malik Model in 1D auf dem Intervall $[-1, 1]$
   $$u_t = \left(a \left(u_x^2 \right) u_x \right)_x .$$
   $$u_x(\pm 1, t) = 0$$
   mit $a(s) = \frac{1}{1+bs}$, $b > 0$.
   Durch die Variablentransformation $v = u_x$ erhalten wir
   $$v_t = \left(a \left(v^2 \right) v \right)_{xx}$$
   $$v(\pm 1, t) = 0$$
   und betrachten die modifizierte Gleichung
   $$v_t = \left(a \left(v^2 \right) v \right)_{xx} - \varepsilon v_{xxxx}$$
   $$v(\pm 1, t) = 0 \quad v_{xx}(\pm 1, t) = 0$$
   für kleines ε.
   Zeigen sie dass das Energiefunktional
   $$E(v) = \int \left(A(v^2) + \frac{\varepsilon^2}{2} v_x^2 \right) dx$$
   mit $A'(v) = \frac{a(v)}{2}$ die Dissipationsgleichung $\frac{dE}{dt} [v(\cdot, t)] = -D [v(\cdot, t)]$ mit passenden v erfüllt.
   Berechnen sie für die linearisierte Gleichung
   $$v_t = a v_{xx} - \varepsilon v_{xxxx}$$
   $$v(\pm 1, t) = 0 \quad v_{xx}(\pm 1, t) = 0$$
   mit $a = \mathit{const} < 0$ die Fourier-Cosinus Koeffizienten der Lösung. Beschreiben sie deren Verhalten für verschiedene Frequenzen.

3. *Programmieraufgabe: Gauss-Filter*
   Implementieren sie einen Gaußschen Filter in Matlab, dessen Eingabeparameter ein Signal u und Varianz σ sind. Verwenden sie die Matlab Funktion conv() um die Faltung ihres Integrals zu berechnen.

4. *Programmieraufgabe: Perona-Malik Model in 1D*
   Schreiben sie ein Matlab Programm , welches

$$v_t = \left(a\left(v^2\right)v\right)_{xx} - \varepsilon v_{xxxx}$$

mit homogenen Dirichlet Randbedingungen löst. Durch Variablentransformation erhält man

$$\begin{aligned} v_t &= w_{xx} \\ w &= a(v^2)v - \varepsilon v_{xx}. \end{aligned}$$

mit homogenen Dirichlet Randbedingungen für w und v. Verwenden sie folgende Diskretisierung

$$\begin{aligned} \frac{v^{k+1} - v^k}{\tau} &= w_{xx}^{k+1} \\ w^{k+1} &= a\left(\left(v^k\right)^2\right)v^k - \varepsilon v_{xx}^{k+1} \end{aligned}$$

wobei sie die 2ten Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzen. Verwenden sie als Startwert

$$v_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0.4, 0.6] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und vergleichen sie ihre Ergebnisse für verschiedene Werte von ε.