Übung zur Mathematischen Bildverarbeitung

Übungsblatt 4, Abgabe bis 03.05.2007, 12 Uhr

1. *Konstruktion von Skalierungsfunktionen I:*
   Eine notwendige Bedingung an ϕ für die Existenz einer MRA ist dass

$$\phi(x) = 2 \sum h_k \phi(2x-k) \quad \text{wobei } h_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle \tag{1}$$

   (siehe Gleichung 1.36 im Skript). Eine weitere charakteristische Bedingung an die Skalierungsfunktion lautet $\int_R \phi \neq 0$ für $\phi \in L^2(R) \bigcap L^1(R)$.
   Zeigen sie dass $\int_R \phi = 0$ für ϕ mit kompakten Träger im Widerspruch zur Vollständigkeitsbedingung steht.

2. *Konstruktion von Skalierungsfunktionen II:*
   Wendet man die Fouriertransformation auf Bedingung 1 an, so erhält man

$$\mathcal{F}\phi(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \mathcal{F}\phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

   mit $H(\omega) = \sum_k h_k e^{-ik\omega}$.
   Zeigen sie dass gilt

$$|H|^2(\omega) + |H|^2(\omega+\pi) = 1. \quad \omega \in (0,\pi)$$

   Hinweis:
   Verwenden sie die Orthonormalität der Skalierungsfunktion ϕ und die 2π-Periodizität der Funktion H.

3. *Faltung:*
   Wir betrachten die Faltung

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)dy$$

   wobei G die folgenden Voraussetzungen erfüllt

   - $G \geq 0$
   - $\int G(x)dx = 1$ und $\int x^2 G(x)dx < \infty$
   - G symmetrisch.

   Zeigen sie dass für $f \in C^2$ gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{u(x) - f(x)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2} f''(x) \int z^2 G(z)dz$$