Übung zur Mathematischen Bildverarbeitung

Übungsblatt 12, Abgabe bis 05.07.2007, 12 Uhr

1. *Deconvolution Problem:*
   Wir betrachten die Integralgleichung
   $$Ku = f$$
   mit
   $$Ku(x) = \int k(x-y)u(y)dy$$
   Zeigen sie, dass für den Gaußschen Kern das Problem schlecht gestellt ist. Verwenden sie dazu die Fouriertransformation und den Satz von Plancherel analog zur Vorlesung. Geben sie gestörte Daten $\tilde{f}$ an, sodass $\|f - \tilde{f}\| \to 0$ die Lösungen jedoch nicht konvergieren.

2. Wir betrachten das Funktional
   $$J[u] = \int f \log\left(\frac{f}{Au}\right)$$
   wobei $A = \int k(x,y)u(y)dy$ ist. Für den Kern gilt:
   $$\int k(x,y)dy = \int k(x,y)dx = 1.$$
   Zeigen sie, dass
   $$J'(u) = -A^*\left(\frac{f}{Au}\right)$$
   wobei A^* analog zur Vorlesung gewählt wird.

3. *Segmentation:*
   Wir betrachten das Minimierungsproblem
   $$\lambda \int (\frac{1}{2} - f)u + \int |\nabla u| \to \min$$
   unter der Bedingung $0 \leq u \leq 1$. Schreiben sie eine Matlab-Funktion für die explizite Diskretisieung
   $$\begin{aligned} u_{k+\frac{1}{2}} &= u_k + \tau\lambda(f_s - \frac{1}{2}) - \tau \mathrm{curv}(u_k) \\ u_{k+1} &= P(u_{k+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$
   wobei f_s das auf $[0,1]$ skalierte Bild bezeichnet und P eine Projektion, welche Werte größer als 1 abschneidet. Testen sie Ihr Programm für verschiedenen Werte von λ als auch für verrauschte Bilder. Vergleichen sie die Ergebnisse für verschiedene Skalierungen von f auf $[0,\alpha]$ mit $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Dieser Zettel ist freiwillig - die Beispiele werden als Bonus zu ihren bisherigen dazugerechnet !