Übung zur Mathematischen Bildverarbeitung

Übungsblatt 10, Abgabe bis 21.06.2007, 12 Uhr

1. *Schwache Konvergenz in L^1:*
   Wir betrachten die Funktion
   $$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < x < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Zeigen sie, dass die Funktionen keinen schwachen Grenzwert in $L^1(\mathbb{R})$ besitzt.

2. *Deblurring I:*
   Wir betrachten das Funktional
   $$J[u] = \frac{\lambda}{2} \int (k * u - f)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx$$
   mit homogenen Dirichlet Randbedingungen und der Faltung
   $$(Ku)(x) = k * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) \, u(y) \, dy$$
   wobei k ein Gausscher Faltungskern ist. Außerhalb von Ω setzen sie das Bild mit 0 fort.
   Berechnen die die Richtungsableitung des Funktionals J und zeigen sie, dass aus
   $$dJ(u, v) = 0 \quad \forall v, v = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$
   die Optimalitätsbedingung
   $$\lambda K^* (Ku - f) - \Delta u = 0$$
   folgt, wobei K^* der adjungierte Operator
   $$(K^* v)(x) = \int k(y-x) v(y) dy$$

3. *Deblurring II:*
   Zeigen sie, dass das Funktional J aus Beispiel 2
   - konvex und
   - strikt konvex

   ist.

4. *Programmierbeispiel: Deblurring*
   Schreiben sie ein Matlab Programm, das die Optimalitätsbedingung
   $$\lambda K^* (Ku - f) - u'' = 0$$
   in $(-\pi, \pi)$ mit homogenen Neumann Randbedingungen löst. Verwenden sie dazu den Ansatz
   $$u(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin(nx) \, .$$
   Testen sie ihr Programm für Daten mit bzw. ohne Rauschen und vergleichen sie verschiedene Werte von N und λ.