Kapitel 5

Inpainting

Inpainting ist ein klassisches Problem der Bildrestauration. Hierbei soll ein Bild, dessen Farb- oder Grauwerte in $\Omega \setminus D$ bekannt sind, in D restauriert werden (wobei typischerweise D relativ klein im Vergleich zu Ω ist). Aus mathematischer Sicht is Inpainting damit einfach ein Interpolationsproblem und bekannte Methoden zur Interpolation könnten angewandt werden. Schwierigkeiten treten dabei aber wieder wegen Kanten und Texturen auf, da klassische (lineare) Interpolationsmethoden diese zerstören würden. Weitere Vorsicht ist auch geboten, wenn auf $\Omega \subset D$ nur eine verrauschte Version des Bilds bekannt ist, dann ist es auch ein gleichzeitiges Entrauschen mit den Methoden analog zu Kapitel 2 nötig.

5.1 Variationsmethoden zum Inpainting

Am einfachsten zu formulieren sind wieder Variationsmethoden. Sei f das gegebene Bild auf $\Omega \setminus D$, dann kann man versuchen ein Funktional der Form

$$J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (u - f)^2 \, dx + E(u) \tag{5.1}$$

zu minimieren, mit einem geeigneten Regularisierungsfunktional $E(u)$. Durch die Regularisierung sollte das Bild in gewisser Weise glatt auf D fortgesetzt werden. Wegen der guten Eigenschaften bei der Kantenerhaltung ist natürlich wieder die Wahl der totalen Variation als Regularisierungsfunktional naheliegend, dies führt auf das sogenannte TV inpainting Modell

$$J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (u - f)^2 \, dx + |u|_{BV} \to \min_{u \in BV(\Omega)} . \tag{5.2}$$

Zum einfacheren Verständnis der Schwierigkeiten beim Inpainting wollen wir zunächst aber das weniger realistische, aber einfacher zu analysierende quadratische Modell

$$J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (u - f)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \to \min_{u \in W^{1,2}(\Omega)} . \tag{5.3}$$

Die Optimalitätsbedingung dieses Problems berechnet man leicht als

$$-\Delta u + \lambda \chi_{\Omega \setminus D}(u - f) = 0,$$

wobei $\chi_{\Omega \setminus D}$ die charakteristische Funktion von $\Omega \setminus D$ ist. Wir sehen, dass die Funktion u in D harmonisch ist, man spricht deshalb auch von harmonischem Inpainting in diesem Fall.

Besonders interessant ist der Grenzwert $\lambda \to \infty$, der ja vor allem bei nichtverrauschten Bildern realisiert werden sollte. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass f in $\Omega \setminus D$ glatt ist, sodass dort keine Grenzschichten entstehen. Man sieht dann sofort, dass in $\Omega \setminus D$ der Term nullter Ordnung dominiert, d.h. wir erhalten im Grenzwert $u = f$. In D ist der Grenzwert noch einfacher, dort ist ja u für jedes λ harmonisch, eine Eigenschaft die natürlich auch im Grenzwert erhalten bleibt. Damit ist das Inpainting u in D als Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } D \qquad u = f \quad \text{auf } \partial D$$

eindeutig bestimmt. Wir sehen also, dass wir im wesentlichen den Grauwert vom Rand harmonisch fortsetzen. Ein grosser Nachteil, und irritierend für das menschliche Auge, sind mögliche Knicke in den Isokonturen. Die Isokonturen werden dann glatt fortgesetzt, wenn u und die Normale an die Isokonture ebenfalls über ∂D stetig bleibt. Wir haben gesehen, dass die Normalenrichtung durch ∇u gegeben ist, weshalb ∇u über ∂D stetig sein sollte, d.h. $\nabla u = \nabla f$ auf ∂D. Für die tangentiale Komponente des Komponenten ist diese Identität automatisch erfüllt, wenn $u = f$ auf ∂D gilt. Somit ist die wirklich einschränkende Bedingung, dass auch $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n}$ auf ∂D gelten sollte. Wir sehen also, dass für ein vernünftiges Inpainting eine Dirichlet- und eine Neumann-Randbedingung erfüllt sein sollte, was natürlich mit einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (d.h. mit einer Regularisierung, die nur vom Gradienten abhängt) nicht erfüllbar ist.

Abbildung 5.1: Rohrschach-Test: wie soll das Bild im roten Bereich fortgesetzt werden?

Etwas ähnliches passiert beim TV Inpainting Modell. Die Optimalitätsbedingung ändert sich zu

$$p + \lambda \chi_{\Omega \setminus D}(u - f) = 0, \qquad p \in |u|_{BV}$$

und damit verschwindet der Subgradient automatisch in D. Da wir wissen, dass der Subgradient auf Kantenmengen gleich der Krümmung ist, können Kanten also nur linear fortgesetzt werden. Dies passiert auch wirklich, eventuell sogar noch mehr unterwnschtes. Wir betrachten dazu wieder formal den Grenzwert $\lambda \to \infty$, d.h. $u = f$ auf $\Omega \setminus D$, und zwar für Bild 5.1, wobei D das rote Rechteck ist. Wir nehmen an, dass weiss den Grauwert 0 und schwarz den Grauwert 1 hat. Eine für die menschliche Psychologie naheliegende Vermutung wäre, dass die beiden schwarzen Rechtecke verbunden werden sollten, da sie ja parallel und gleich gross sind. Das TV Modell kann die Rechtecke, egal wie lang sie sind, aber nur verbinden, wenn ihr Abstand d (die Breite von D in horizontaler Richtung) kleiner als ihre Breite b in vertikaler Richtung ist. Gilt $d > b$, so ist es günstiger, den roten Bereich völlig weiss zu malen, denn in diesem Fall ist die totale Variation des Bildes in D gleich $2b$ (Länge der dadurch entstehenden schwarz-weiss Kanten). Die gerade Verbindung der beiden Rechtecke würde die grössere totale Variation $2d$ erzeugen. Man sieht auch hier wieder, dass ein Problem die fehlende stetige Fortsetzung der Isokonturen ist, denn eine solche würde eine rein weisse Lösung in D nicht zulassen.

Ein Lösungsansatz zum Inpainting mit stetigen Isokonturen sind Differentialgleichungen höherer Ordnung bzw. Regularisierungsfunktionale höherer Ordnung. Man versucht dann statt eines Gradienten-Abhängigen Funktionals eine Minimierung der Form

$$\int_D G(u, \nabla u, D^2 u) \to \min_u, \qquad u = f, \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \text{ auf } \partial D. \tag{5.4}$$

Ein einfaches Beispiel ist biharmonisches Inpainting, mit $G(u, \nabla u, D^2 u) = \Delta u$. In diesem Fall rechnet man leicht nach, dass das Inpainting durch die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{in } D, \qquad u = f, \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \text{ auf } \partial D.$$

gegeben ist. Damit kann man die Isokonturen glatt fortsetzen, zahlt aber den Preis einer noch stärkeren Glättung als im harmonischen Fall. Motiviert durch TV-Methoden und morphologischs Ansätze werden in letzter Zeit vor allem sogenannte *Euler-Elastica* verwendet. Dabei konstruiert man eine Verallgemeinerung der totalen Variation, in dem man auf Isokonturen / Kanten auch noch das Quadrat der Krümmung $\kappa = \nabla \cdot (\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$ addiert. Die resultierende Energie (wieder berechnet mit der Co-Area Formel) hat dann die Form

$$E(u) = |u|_{BV(D)} + c \int_D \left(nabla \cdot (\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)^2 |\nabla u| \, dx. \tag{5.5}$$

Die mathematische Analyse des entstehenden Modells ist noch weitgehend offen, im Gegensatz zu Gleichungen zweiter Ordnung hat man hier kein Maximumprinzip mehr zur Verfügung um mit dem nichtlinearen degenerierten Problem umzugehen.