# Kapitel 4

# Segmentierung

In diesem Abschnitt werden wir kurz einige Modelle und Methoden der Bildsegmentierung diskutieren. Dabei werden wir uns auf Variationsmodelle beschränken. Im Gegensatz zu den meisten anderen Aufgaben in der Bildverarbeitung sucht man bei der Segmentierung nicht eine Grau - oder Farbwertfunktion eines Bildes, sondern aus der gegebenen (möglicherweise verrauschten) Grauwertfunktion sollen die Kanten oder Grenzen der Objekte bestimmt werden. Dies bedeutet, dass die Unbekannte bei der Segmentierung eine Menge von Kurven oder Oberflächen (in 3D) ist. Damit sind auch andere numerische Methoden als die bisher diskutierten zur Lösung von Segmentierungsproblemen nötig, wie wir noch sehen werden.

## 4.1 Das Mumford-Shah Modell

Wir beginnen mit dem vielleicht bekanntesten Modell zur Segmentierung, dem Ansatz von Mumford und Shah. Wir starten mit einem verrauschten Bild $f$ und versuchen daraus die Kantenmenge des Bildes zu identifizieren. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, so erwarten wir eine Kantenmenge von der Dimension $d-1$, d.h. das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma)$ ist endlich. Neben $\Gamma$ suchen wir auch noch die Grauwertfunktion $u$ des Bildes, die auf $\Omega \setminus \Gamma$ glatt (zumindest stetig) sein sollte. Man kann (bei gegebener Kantenmenge $\Gamma$) für $u$ eine Variationsmethode wie beim Entrauschen ansetzen, die $u$ nur weg von den Kanten glättet, in dem man das Funktional

$$J_0(u) = \frac{\lambda}{2} \int_\Omega (u-f)^2 \; dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 \; dx$$

minimiert. Dabei muss man das zweite Integral richtig interpretieren: normalerweise ist im Sinne eines Lebesgue-Integrals ein Integral über $\Omega \setminus \Gamma$ gleich dem Integral über $\Omega$, da $\Gamma$ eine Nullmenge ist. Allerdings erlauben wir, dass $u$ unstetig über $\Gamma$ und damit $\nabla u$ singulär ist. Bei der Minimierung suchen wir also nur eine Funktion in $W^{1,2}(\Omega \setminus \Gamma)$.

Soll nun auch die Kantenmenge bestimmt werden, so könnte man versuchen das Funktional $J_0$ auch bezüglich $\Gamma$ zu minimieren. Für grosses $\lambda$ sollte $u$ sehr nahe bei $f$ sein, also auch eine ähnliche Kantenmenge haben. Bei der Minimierung bezüglich $\Gamma$ ergibt sich diese Menge ungefähr als Kantenmenge von $u$.

Es bleibt noch ein Problem, nämlich eine Kontrolle über das Aussehen von $\Gamma$ und damit verbunden das Rauschen im Bild. Durch das Rauschen können einige Pixelwerte stark gestört werden, und dies kann man als sehr kleine künstliche Objekte im Bild interpretieren, die man gerne eliminieren würde. Das obige Funktional $J_0$ hat dafür aber keinen Mechanismus, denn bei gegebenen Daten würde wirklich jedes gestörte Pixel als eigenes Objekt erkannt werden (dann ist es möglich $(u-f)^2$ klein zu machen, und $|\nabla u|$ wird innerhalb des Objekts ebenfalls klein). Ausserdem können sich sehr komplizierte Kantenmengen ausbilden, unter anderem mit starken Oszillationen, was natürlich ebenfalls unerwünscht ist. In beiden Fällen erkennt man, dass zu lange Kanten bestraft werden sollten. Bei den Oszillationen ist dies sofort klar, während man sich beim Rauschen die Skalierung überlegen muss. Bei einem sehr kleinen Objekt verhält sich das Volumen wie das Quadrat des Durchmessers $d$, während die Länge so wie der Durchmesser skaliert. Entfernt man also ein sehr kleines Objekt, so können die beiden Volumsintegrale höchstens um einen Term der Ordnung $d^2$ wachsen, während die Länge um einen Term der Ordnung $d$, also wesentlich stärker abnimmt. Für ein Funktional der Form $J_0(u,\Gamma) + \mu\mathcal{H}^1(\Gamma)$ würde das eliminieren eines sehr kleinen Objekts also einen Abstieg bedeuten. Aus dieser Motivation ist es natürlich, das Mumford-Shah Funktional zur Segmentierung zu minimieren, in $d$ Raumdimensionen gegeben durch

$$J_{MS}(u,\Gamma) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u-f)^2\; dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Gamma} |\nabla u|^2\; dx + \mu\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma). \tag{4.1}$$

Eine Optimalitätsbedingung für ein Minimum $(\hat{u},\hat{\Gamma})$ ist nun sehr schwierig herzuleiten, da man ja nach einer geometrischen Variable $\Gamma$ differenzieren müsste. Zumindest bezüglich $\hat{u}$ kann man mit den Standard-Methoden des letzten Abschnitts aber eine Bedingung herleiten. Für $\hat{\Gamma}$ fix ist $\hat{u}$ insbesondere ein Minimum des Funktionals $\hat{J}_0 : u \mapsto J_{MS}(u,\hat{\Gamma})$, und da dieses Funktional quadratisch und konvex ist, ist das Minimum durch $\hat{J}_0'(\hat{u}) = 0$ charakterisiert. Dies bedeutet

$$0 = \hat{J}_0'(\hat{u})v = d\hat{J}_0(\hat{u};v) = \lambda\int_\Omega (u-f)v\; dx + \int_{\Omega\setminus\Gamma} \nabla u\cdot\nabla v\; dx = 0$$

gilt, für alle $v \in W^{1,2}(\Omega\setminus\Gamma)$. Bei der Anwendung des Gauss'schen Satzes müssen wir nun vorsichtig sein, da wir auch Randintegrale über $\Gamma$ berücksichtigen müssen. Dies ist sofort klar, wenn $\Gamma$ der Rand eines Teilgebiets $D$ von $\Omega$ ist, da man dann einfach getrennte Integrale über $D$ und $\Omega\setminus D$ berechnen muss. Deshalb erhalten wir

$$0 = \lambda\int_\Omega (u-f)v\; dx - \int_{\Omega\setminus\Gamma} \Delta uv\; dx + \int_\Gamma (\frac{\partial u}{\partial n_+}v_+ - \frac{\partial u}{\partial n_-}v_-)\; d\sigma = 0,$$

wobei der Index + bzw. − den Grenzwert von beiden Seiten an $\Gamma$ bezeichnet (+ aus positiver Normalenrichtung, − aus negativer). Da man $v$ in $\Omega\setminus\Gamma$ als beliebige $W^{1,2}$-Funktion wählen kann, und auch die Randwerte $v_+$ und $v_-$ beliebig in einem geeigneten Funktionenraum ($H^{1/2}(\Gamma)$) sind, folgt damit

$$-\Delta u + \lambda u = \lambda f \qquad \text{in } \Omega\setminus\Gamma$$

und auf der Kantenmenge gilt

$$\frac{\partial u}{\partial n_+} = \frac{\partial u}{\partial n_-} = 0 \qquad \text{auf } \Gamma.$$

Man beachte, dass $u$ nicht stetig über $\Gamma$ ist, aber die Normalableitung ist in jedem Fall null. Dies bedeutet, dass die Grauwerte der rekonstruierten Funktion in der Nähe des Sprungs flach sind. Diese Analyse gilt natürlich nur unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen and $u$ und $\Gamma$, sie liefert aber in jedem Fall eine gute Intuition über die Gestalt der Lösungen.

Auch bezüglich dem Gebiet kann man eine entsprechende Optimalitätsbedingung herleiten (was hier aber im Detail zu weit führen würde). Es stellt sich heraus, dass diese Bedingung direkt mit der (mittleren) Krümmung $\kappa$ der Kantenmenge in Verbindung steht, es gilt

$$\mu\kappa = \frac{1}{2}(|\nabla u|_-^2 - |\nabla u|_+^2) \qquad \text{auf } \Gamma.$$

Die Krümmung wird also einerseits durch den Parameter $\mu$ kontrolliert, andererseits durch den Sprung im Gradienten (bzw. in der Tangentialableitung, da die Normalableitung jeweils verschwindet).

Die rigorose Analysis des Mumford-Shah Funktionals ist eine sehr schwierige und teilweise noch immer nicht gelöste Aufgabe. Alleine der Beweis der Existenz eines Minimums erfordert viele der modernsten Methoden der Variationsrechnung und geometrischen Maßtheorie, das Buch von Morel und Solimini [11] widmet sich fast ausschliesslich dem Problem der Existenz.

Auch numerisch ist das Mumford-Shah Funktional schwierig zu minimieren, vor allem wegen der Abhängigkeit von $\Gamma$. Ein weit verbreiteter Ansatz zur Lösung solcher Probleme sind Level-Set Methoden, die wir hier aus Zeitgründen aber nicht näher vorstellen können. Wir werden hier einen anderen Ansatz diskutieren, nämlich eine Approximation des Funktionals mit einer "diffusen Oberfläche". Die Idee dabei ist eine Approximation des Oberflächenintegrals (oder Kurvenintegrals in 2D) durch lokale Volumsintegrale. Falls $v$ eine Funktion ist, sodass

$$v(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\text{dist}(x,\Gamma)}{\epsilon} & \text{if } \text{dist}(x,\Gamma) \leq \epsilon \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Dann gilt für glatte Kurven und $\epsilon$ hinreichend klein

$$\int_\Gamma d\sigma = \frac{3}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}^d} v^2 \, dx.$$

Man kann die Funktion $v$ als eine diffuse Darstellung des Interfaces interpretieren, die die Information über ein Gebiet mit Durchmesser $2\epsilon$ verteilt. Das Volumsintegral über $\Omega \setminus \Gamma$ kann man analog durch ein Integral über $\Omega$ mit einem Gewichtsfaktor $(1-v)^2$ approximieren. Bei der Minimierung im Mumford-Shah Modell ist eine Form von $v$ wie die obige schwer direkt zu implementieren. Deshalb macht man eine weitere Approximation im Zielfunktional, die garantiert, dass $v$ stetig von 0 auf 1 übergeht. Dies wird im sogenannten Ambrosio-Tortorelli Funktional realisiert, und man minimiert

$$J_{AT}(u,v) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u-f)^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (1-v)^2 |\nabla u|^2 \, dx + \mu \left( \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega v^2 \, dx + \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \right). \quad (4.2)$$

Bei der Minimierung mit kleinem $\epsilon$ bewirkt der $\frac{1}{\epsilon}$-Term, dass $v$ fast überall sehr klein wird, während der mit $\epsilon$ multiplizierte Term eine lokale Glättung bewirkt. Da wir nun ein unrestringiertes Optimierungsproblem für zwei Funktionen $u$ und $v$ zu lösen haben, können wir zumindest die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung herleiten. Daraus erhält man wieder partielle Differentialgleichungen, nämlich

$$\begin{aligned} \lambda(u-f) - \nabla \cdot ((1-v)^2 \nabla u) &= 0, \\ -\epsilon \Delta v + \frac{1}{\epsilon} v + \frac{1}{\mu}(v-1)|\nabla u|^2 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung sieht man, zumindest formal, die asymptotische Übereinstimmung mit dem Mumford-Shah Funktional. Da wir nach einer Lösung suchen, die in einer Umgebung der Ordnung $\epsilon$ um einen Kurve $\Gamma$ variiert, machen wir den Ansatz

$$v(x) = V(\frac{d(x)}{\epsilon}), \qquad V(\pm\pi) = 0,$$

wobei $d$ =dist$(.,\Gamma)$ die Distanzfunktion zu $\Gamma$ ist. Es gilt dann

$$\nabla v = \frac{1}{\epsilon}V'(\frac{d(x)}{\epsilon})\nabla d, \qquad \Delta v = \frac{1}{\epsilon^2}V''(\frac{d(x)}{\epsilon})|\nabla d|^2 + \frac{1}{\epsilon}V'(\frac{d(x)}{\epsilon})\Delta d$$

Die Distanzfunktion erfüllt $|\nabla d| = 1$ fast überall und damit erhalten wir für den Term höchster Ordnung $(\frac{1}{\epsilon})$ $V'' = V$ und aus der Randbedingung folgt damit zu höchster Ordnung

$$v(x) = \cos(\frac{\pi d(x)}{\epsilon}).$$

Die nächste Ordnung impliziert dann

$$V'(\frac{d(x)}{\epsilon})\Delta d = \frac{1}{\mu}(1-v)|\nabla u|^2.$$

Nach einer Integration über den Streifen der Ordnung $\epsilon$ und unter Beachtung der Tatsache, dass $|\nabla u|$ über die Kurve nicht stetig sein wird, folgt im Grenzwert

$$\kappa = \Delta d = c(|\nabla u|_-^2 - |\nabla u|_+^2),$$

d.h. die selbe Bedingung wie beim Mumford-Shah Funktional (bis auf die Konstante, die durch geeignete Wahl von $\mu$ korrigiert wird).

Das Ambrosio-Tortorelli Funktional ist kein konvexes Funktional von $(u,v)$, aber es ist offensichtlich konvex (sogar quadratisch), wenn man eine der beiden Variablen festhält. Deshalb ist eine beliebte Strategie zur Lösung eine alternierende Minimierung bezüglich $u$ und $v$. D.h. man berechnet

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \arg\min_u J_{AT}(u, v^k) \\ v^{k+1} &= \arg\min_v J_{AT}(u^{k+1}, v). \end{aligned}$$

## 4.2 Das Chan-Vese Modell

Eine etwas einfachere Version des Mumford-Shah Funktionals ist das Chan-Vese Modell. Dabei nimmt man an, dass $f$ im wesentlichen aus zwei Farbtönen besteht, die man separieren möchte. Deshalb macht man für $u$ den Ansatz

$$u = \begin{cases} c_1 & x \in D \subset \Omega \\ c_2 & x \in \Omega \setminus D \end{cases}$$

mit zwei unbekannten Konstanten $c_1$ und $c_2$, und $\Gamma = \partial D$. Setzt man diese Form in das Mumford-Shah Funktional ein, so folgt $\nabla u = 0$ in $\Omega \setminus \Gamma$ und es bleibt die Minimierung des Funktionals

$$J_{CV}(c_1, c_2, \Gamma) = \frac{\lambda}{2}\int_D (c_1 - f)^2 \, dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega\setminus D}(c_2 - f)^2 \, dx + \mu\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma). \tag{4.3}$$

Die Konstanten $c_1$ und $c_2$ erhält man dann direkt aus der Optimalitätsbedingung als Mittelwerte von $f$ über $D$ bzw. $\Omega \setminus D$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial c_1} J(c_1, c_2, \Gamma) = \lambda \int_D (c_1 - f)\ dx \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial c_2} J(c_1, c_2, \Gamma) = \lambda \int_{\Omega \setminus D} (c_2 - f)\ dx. \end{aligned}$$

Der interessante Teil ist also die Minimierung bezüglich des Gebiets $D$ bzw. $\Gamma = \partial D$. Fixieren wir also für den Moment die Konstanten $c_1$ und $c_2$, dann hat die Minimierung bezüglich $D$ die Form

$$J(D) = g_0 + \int_D g\ dx + \mathcal{H}^{d-1}(\partial D) \rightarrow \min_D, \tag{4.4}$$

mit der Konstante

$$g_0 = \frac{1}{2\mu} \int_\Omega (c_2 - f)^2\ dx$$

und der gegebenen Funktion

$$g = \frac{1}{2\mu}((c_1 - f)^2 - (c_2 - f)^2).$$

Benutzen wir nun Funktion $v$ als charakteristische Funktion von $D$, dann kann die Minimierung äquivalent als

$$E(u) = \int_\Omega gv\ dx + |v|_{BV} \rightarrow \min_{v \in BV(D;\{0,1\})}. \tag{4.5}$$

geschrieben werden. Dies ist in gewisser Weise die unendlich-dimensionale Version eines kombinatorischen Optimierungsproblems, da man in jedem Punkt $x$ nur zwei Möglichkeiten (0 und 1) für den Funktionswert hast. Da dieses Problem schwierig zu lösen ist, kann man eine Relaxierung betrachten, bei der auch Zwischenwerte zulässig sind, d.h.

$$E(u) = \int_\Omega gv\ dx + |v|_{BV} \rightarrow \min_{v \in BV(D;[0,1])}. \tag{4.6}$$

Die Minimierung von (4.6) ist wesentlich einfacher, man hat ja nur mehr eine obere und eine untere Schranke an $v$. Wenn man aber (4.6) gelöst hat, stellt sich die Frage, ob man aus der Lösung auch ein Minimum von (4.5) berechnen kann. Es gilt dazu das folgende überraschende Resultat:

**Satz 4.1.** *Sei $\hat{u} \in BV(D;[0,1])$ ein Minimum von* (4.6)*, dann ist für fast jedes $\alpha \in [0,1]$ die Funktion*

$$\hat{v}^\alpha(x) := H(\hat{u}(x) - \alpha)$$

*ein Minimum von* (4.5) *und von* (4.6)

**Beweis.** Aus der Definition der Funktionen $\hat{v}^\alpha$ sieht man, dass

$$\hat{u}(x) = \int_0^1 H(\hat{u}(x) - \alpha)\ d\alpha = \int_0^1 \hat{v}^\alpha(x)\ d\alpha.$$

Weiters gilt nach der Co-Area Formel für BV-Funktionen

$$|\hat{u}|_{BV} = \int_0^1 \int_{\partial\{\hat{u} > \alpha\}} d\sigma d\alpha = \int_0^1 |v^\alpha|_{BV}\ d\alpha.$$

Damit folgt, da ja $E(\hat{u}) \leq E(\hat{v}^\alpha)$ gilt

$$\begin{aligned}
E(\hat{u}) &= \int_\Omega g \int_0^1 \hat{v}^\alpha(x)\ d\alpha\ dx + \int_0^1 |v^\alpha|_{BV}\ d\alpha \\
&= \int_0^1 [\int_\Omega g\hat{v}^\alpha\ dx + |v^\alpha|_{BV}]\ d\alpha \\
&= \int_0^1 E(\hat{v}^\alpha)\ d\alpha \\
&\geq \int_0^1 E(\hat{u})\ d\alpha = E(\hat{u}).
\end{aligned}$$

Diese Identität kann nur stimmen, falls $E(\hat{v}^\alpha) = E(\hat{u})$ für fast alle $\alpha$ gilt. □

Mit der Relaxierung kann man nun numerische Methoden analog zum ROF-Funktional verwenden. Da das relaxierte Problem konvex ist, kann man auch die Existenz mit analogen Methoden wie beim ROF-Funktional zeigen. Eindeutigkeit erhält man in diesem Fall aber keine, man kann leicht Fälle nichteindeutiger Lösungen konstruieren.

## 4.3 Segmentierung und das ROF-Funktional

Skalieren wir im Chan-Vese Funktional die Daten $f$ auf ein Grauwert-Intervall um $[0, 1]$ und fixieren $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, dann folgt

$$g = \frac{1}{2\mu}((1-f)^2 - (f)^2) = \frac{1}{2\mu}(1-2f), \qquad g_0 = \frac{1}{2\mu}\int_\Omega f^2\ dx.$$

Damit können wir die Minimierung äquivalent als

$$E(u) = \frac{1}{2\mu}\int_\Omega [v - 2fv + f^2]\ dx + |v|_{BV} \to \min_{v \in BV(D;\{0,1\})} \textit{schreiben}. \tag{4.7}$$

Nun ist aber punktweise entweder $v = 0$ oder $v = 1$ und damit in jedem Fall $v = v^2$. Somit ist

$$v - 2fv + f^2 = v^2 - 2fv + f^2 = (v-f)^2,$$

und wir minimieren somit exakt das ROF-Funktional ($\lambda = \frac{1}{\mu}$) mit $0-1$ Nebenbedingung

$$E(u) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (v-f)^2\ dx + |v|_{BV} \to \min_{v \in BV(D;\{0,1\})}. \tag{4.8}$$