

## Kapitel 3

# Entzerrung und Rekonstruktion

Bei der Aufnahme eines Bildes in der Praxis erhält man so gut wie nie direkt jenes Bild, das man gerne verwenden würde. Wie schon in der Einleitung beschrieben, passiert dies entweder durch Verzerrung (falsche Fokussierung der Kamera, Bewegung von Bild oder Kamera, sonstige optische Effekte) oder durch eine indirekte Messung wie bei der medizinischen Bildverarbeitung. In diesem Fall hat man zur Bestimmung des Bildes eine Integralgleichung erster Art der Form

$$(Ku)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

zu lösen. Typischerweise ist das Integral ebenfalls nur über eine passende Bildregion (der Einfachheit halbe wieder  $\Omega$ ) auszuwerten, was man einfach realisieren kann, indem  $k$  oder  $u$  ausserhalb gleich Null gesetzt wird. Das einfachste Verzerrungsmodell ist eine Fourier'sche Faltung (convolution), d.h. der Kern hat die Form

$$k(x, y) = h(x - y).$$

Ist der Kern bekannt (dies ist häufig der Fall, zumindest bis auf kleine vernachlässigbare Störungen), so erhält man ein lineares *inverses Problem*, nämlich die Lösung einer Integralgleichung erster Art. Für eine genauere Behandlung solcher Probleme verweisen wir auf die gleichnamige Vorlesung, wir werden hier nur einige wichtige Aspekte diskutieren. Manchmal von Interesse ist auch der Fall, wenn ein Faltungskern  $h$  und das Bild  $u$  unbekannt sind, man spricht dann von *blind deconvolution*.

Wir betrachten im Folgenden die Integralgleichung

$$(Ku)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

bzw. den zugehörigen Integraloperator  $K$  etwas genauer. Zunächst verifizieren wir einige eigentlich schöne Eigenschaften des Operators  $K$ , wir nehmen dabei immer an, dass  $\Omega$  ein glattes und beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^d$  sei.

**Lemma 3.1.** *Sei  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  der Integraloperator definiert durch (3.2) und sei  $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ . Dann ist  $K$  wohldefiniert und ein beschränkter linearer Operator.*

*Proof.* Um die Wohldefiniertheit und Beschränktheit nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass  $\|Ku\|_{L^2(\Omega)}$  endlich ist (d.h. das Integral existiert) bzw. durch ein Vielfaches von  $\|u\|_{L^2(\Omega)}$

beschränkt ist. Dazu betrachten wir also

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} (Ku)(x)^2 dx &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} k(x,y)u(y) dy \right)^2 dx \\
 &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(x,y)^2 dy \int_{\Omega} u(y)^2 dy dx \\
 &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(x,y)^2 dx dy \int_{\Omega} u(y)^2 dy \\
 &= \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,
 \end{aligned}$$

wobei wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und den Satz von Fubini verwendet haben. Also gilt

$$\|Ku\|_{L^2(\Omega)} \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

und

$$\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}.$$

Der Operator ist damit stetig und wohldefiniert. □

Neben der Stetigkeit des Operators ist eine andere Eigenschaft von Bedeutung, nämlich die Kompaktheit. Ein Operator  $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  zwischen Banach-Räumen heisst kompakt, falls beschränkte auf präkompakte Mengen abgebildet werden. Äquivalent kann Kompaktheit über Folgen charakterisiert werden, bei einem kompakten Operator enthält  $(Ku_n)$  eine konvergente Teilfolge, falls  $(u_n)$  beschränkt ist. Ein kompakter Operator bildet auch schwach-\* konvergente Folgen auf norm-konvergente ab. Der Beweis der Kompaktheit eines Integraloperators ist etwas komplizierter und wird daher hier nicht genau dargelegt. Die Grundidee ist die Approximation des Operators durch einen Integraloperator mit endlichdimensionalem Bildraum. Dies kann durch Approximation von  $k$  mit einem ausgearteten Kern der Form

$$k_n(x, y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \psi_j(y)$$

erreicht werden. Ein Integraloperator mit endlichdimensionalem Bildraum ist immer kompakt (hier gilt ja eine Analogie zu  $\mathbb{R}^n$ , wo Beschränktheit immer Präkompaktheit impliziert). Dann ist noch zu zeigen, dass der Grenzwert kompakter Operatoren wieder kompakt ist, um die Kompaktheit von  $K$  zu erreichen.

Die Kompaktheit von  $K$  ist vorteilhaft bei der Approximation des Operators, allerdings führt sie zu einem grossen Problem bei der Lösung der Integralgleichung erster Art  $Ku = f$ . Ist  $\mathcal{X} = L^2(\Omega)$ , so können wir eine Orthonormalbasis  $(u_n)$  finden, und es gilt  $\|u_n\| = 1$  sowie  $\|u_n - u_m\| = 1$  für  $n \neq m$ . Andererseits gibt es eine konvergente Teilfolge von  $Ku_n$ . D.h. wir finden in dieser Teilfolge Funktionen  $u$  und  $v$ , sodass  $\|Ku - Kv\|$  beliebig klein ist, während  $\|u - v\| = 1$  gilt. Damit kann die Inverse von  $K$  (falls sie existiert) nicht stetig sein, man spricht dann von einem schlecht gestellten oder instabilen Problem. Dies bedeutet, dass beliebig kleine Fehler in den Daten  $f$  zu beliebig grossen Fehlern in der Lösung von  $Ku = f$  führen können. Da man immer mit Messfehlern bei der Aufzeichnung von  $f$  rechnen muss, ist dies ein sehr ernstes Problem in der Praxis. Nur durch spezielle Wahl der Methoden zur approximativen Lösung von  $Ku = f$  kann man trotz der Instabilität sinnvolle Resultate erzielen.

### 3.1 Entfaltung mit Fourier-Transformation

Bei der Entfaltung ( $k(x, y) = h(x - y)$ ) ist es naheliegend, den Fourier'schen Faltungssatz zu verwenden, der ja das Lösen der Integralgleichung auf eine Division im Frequenzraum (und Berechnung von Fouriertransformation und inverser Fouriertransformation, numerisch mit FFT) zurückführt. Es gilt ja

$$\mathcal{F}(h * u) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h) \mathcal{F}(u),$$

und damit könnte die Lösung der Gleichung direkt aus der Formel

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)}$$

berechnet werden muss. Dies ist aber nur für exakte Daten möglich, da bei Messfehlern die Instabilität der Integralgleichung wieder Probleme macht. Dies äussert sich in diesem Fall indirekt aus den Eigenschaften der Fouriertransformation von  $h$ . Ist  $h$  ein glatter Kern (in vielen Fällen hat man es sogar mit analytischen Kernen wie der Gauss-Verteilung zu tun), dann fällt die Fouriertransformierte gegen Null ab für  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Für ein verrauschtes Bild  $f$  und ein exaktes Bild  $\hat{f}$  ist der Fehler bei dieser Rekonstruktionsformel

$$\mathcal{F}(u - \hat{u})(\omega) = \frac{\mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega)}{(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)(\omega)}.$$

Nun wird das Rauschen aber meist hochfrequent sein, d.h. man macht einen grossen Fehler zwischen  $\mathcal{F}(f)$  und  $\mathcal{F}(\hat{f})$  vor allem für grosses  $\omega$ . Dort ist aber  $|\mathcal{F}(h)(\omega)|$  klein, d.h. der Fehler wird enorm verstärkt. Deshalb ist die obige Rekonstruktionsformel für verrauschte Daten im allgemeinen unbrauchbar und man benötigt eine Regularisierung, um auch im verrauschten Fall noch sinnvolle Approximationen berechnen zu können.

Wir sehen sofort, dass das Problem bei der Rekonstruktionsformel die Division durch  $\mathcal{F}(h)$  bei kleinen Werten ist. Deshalb ist es naheliegend den Term  $\frac{1}{\mathcal{F}(h)(\omega)}$  zu approximieren. Dies kann passieren, in dem man eine Parameter-abhängige Funktion  $R_\alpha$  definiert, sodass  $R_\alpha$  beschränkt ist für  $\alpha > 0$ , aber für  $\alpha \rightarrow 0$  punktweise gegen die Funktion  $R_0(t) = \frac{1}{t}$  konvergiert. Die resultierende approximative Rekonstruktionsformel ist dann

$$\mathcal{F}(u_\alpha)(\omega) = R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega)) \frac{\mathcal{F}(f)(\omega)}{(2\pi)^{d/2}}. \quad (3.3)$$

Beispiele für die Funktion  $R_\alpha$  sind einfaches Abschneiden

$$R_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{für } |t| > \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder Verschieben des Nenners von Null weg, etwa durch

$$R_\alpha(t) = \frac{1}{\arg(t)(|t| + \alpha)}$$

oder

$$R_\alpha(t) = \frac{\bar{t}}{|t|^2 + \alpha^2}.$$

In den beiden ersten Beispielen gilt  $|R_\alpha(t)| \leq \frac{1}{\alpha} < \infty$ , im letzten  $|R_\alpha(t)| \leq \frac{1}{2\alpha} < \infty$ .

Ist  $C_\alpha$  eine obere Schranke für  $R_\alpha$  und gilt wieder (2.39) für die verrauschten Daten, dann können wir den Rekonstruktionsfehler durch  $C_\alpha$  und  $\sigma$  abschätzen. Nach dem Satz von Plancherel gilt (mit  $\hat{u}$  als Lösung von  $h * \hat{u} = \hat{f}$  wie oben)

$$\begin{aligned} \|u_\alpha - \hat{u}\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u})\|_{L^2} \\ &\leq \|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u}_\alpha)\|_{L^2} + \|\mathcal{F}(\hat{u}_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u})\|_{L^2}, \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{u}_\alpha = R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega)) \frac{\mathcal{F}(\hat{f})(\omega)}{(2\pi)^{d/2}}.$$

Man kann zeigen, dass der zweite Term gegen Null konvergiert für  $\alpha \rightarrow 0$ , hier spielt nur der Approximationsfehler für die exakten Daten  $\hat{f}$  eine Rolle. Der erste Term des Fehlers ist leicht abzuschätzen, es gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u}_\alpha)\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega)) \mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega))|^2 \left| \mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega) \right|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} C_\alpha^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} C_\alpha^2 \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(\hat{f})\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung des Satzes von Plancherel impliziert dann

$$\|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u}_\alpha)\|_{L^2} \leq \frac{C_\alpha}{(2\pi)^{d/2}} \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(\hat{f})\|_{L^2} = \|f - \hat{f}\|_{L^2} \leq \frac{C_\alpha}{(2\pi)^{d/2}} \sigma.$$

Dies impliziert auch sofort eine Bedingung an die richtige Wahl des Parameters  $\alpha$  in Abhängigkeit von der Varianz des Rauschens, es muss ja für die Konvergenz zum richtigen Bild für  $\sigma \rightarrow 0$  auch  $C_\alpha \sigma \rightarrow 0$  gelten. In den obigen Beispielen bedeutet dies immer  $\frac{\sigma}{\alpha} \rightarrow 0$ , d.h.  $\alpha$  muss langsamer gegen Null gehen als  $\sigma$ .

Eine Approximation der obigen Form ergibt immer eine lineare Methode zur Regularisierung, und in allen Fällen werden durch die Wahl der Funktion  $R_\alpha$  hohe Frequenzen gedämpft. Dies bedeutet natürlich wieder für das rekonstruierte (entzernte) Bild, dass Kanten immer noch verschwommen sind. Falls Kanten wichtig sind, ist es nützlich wieder zu einer Variationsmethode überzugehen, die die totale Variation berücksichtigt. Dies werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren. Zuvor wollen wir aber noch die Beziehung des obigen Vorgehens zu Variationsmethoden klären. Im Fall  $R_\alpha(t) = \frac{\bar{t}}{|t|^2 + \alpha^2}$  gilt

$$|\mathcal{F}(h)|^2 \mathcal{F}(u_\alpha) + \alpha^2 \mathcal{F}(u_\alpha) = \overline{\mathcal{F}(h)} \mathcal{F}(f),$$

und man rechnet leicht nach, dass dies die Optimalitätsbedingung für die Minimierung von

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)v - \mathcal{F}(f)|^2 d\omega + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 d\omega$$

bezüglich  $v = \mathcal{F}(u)$  ist. Mit dem Satz von Plancherel kann man das Funktional wieder in den ursprünglichen Raum umrechnen, und erhält nach Anwendung des Faltungssatzes

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |h * u - f|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx.$$

Mit  $\lambda = \frac{1}{\alpha^2}$  erhalten wir damit auch  $u_\alpha$  als Minimum des Funktionals

$$J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |h * u - f|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx, \quad (3.4)$$

also einer speziellen Variationsmethode, bei der die Regularisierung nicht vom Gradienten, sondern nur von  $u$  abhängt.

### 3.2 Variationsmethoden zur Bildrekonstruktion

Variationsmethoden sind sehr einfach vom Entrauschen zum Entzerren und zur Rekonstruktion zu verallgemeinern. Genauso wie in (3.4) muss nur im ersten Term im Zielfunktional  $u$  durch  $Ku$  ersetzt werden, um die Verzerrung oder die Bildmodalität, die zu den Daten führt, korrekt wiederzugeben. Bei einem Gradienten-Term in der Energie erhalten wir also

$$J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Ku - f|^2 dx + \int_{\Omega} F(x, \nabla u) dx \quad (3.5)$$

als zu minimierendes Funktional. Damit erhält man auch eine Verallgemeinerung des ROF-Funktional für die Entzerrung und Rekonstruktion, nämlich

$$J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Ku - f|^2 dx + |u|_{BV}. \quad (3.6)$$

Um die Optimalitätsbedingung zu erhalten, muss die Ableitung des Funktionals

$$R(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Ku - f|^2 dx$$

berechnet werden. Die Richtungsableitung ergibt sich direkt als

$$dR(u; v) = \lambda \int_{\Omega} (Ku - f)Kv dx = \lambda \langle Ku - f, Kv \rangle_{L^2}.$$

Durch Verwendung des adjungierten Operators  $K^*$  erhalten wir

$$dR(u; v) = \lambda \langle K^*(Ku - f), v \rangle_{L^2}$$

und damit

$$R'(u) = \lambda K^*(Ku - f).$$

Es fehlt damit nur noch die Berechnung des adjungierten Operators  $K^*$ . Seien also  $u, v \in L^2(\Omega)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \langle Ku, v \rangle_{L^2} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(x, y) u(y) dy v(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(x, y) v(x) dx u(y) dy \\ &= \langle u, K^*v \rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

mit

$$(K^*v)(x) = \int_{\Omega} k(y, x)v(y) dy.$$

Die Optimalitätsbedingung ist dann

$$\lambda K^*(Ku - f) + p = 0, \quad p \in \partial E(u), \quad (3.7)$$

wobei  $E$  das Regularisierungsfunktional ist, wie z.B. die totale Variation.

Es kann bei der Entzerrung durchaus sinnvoll sein auch Regularisierungsfunktionale zu verwenden, die nicht vom Gradienten sondern nur von  $u$  abhängen. Ein Beispiel dafür haben wir ja schon bei der Entfaltung mit Fourier-Transformation gesehen, nämlich

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Man berechnet leicht  $E'(u) = u$  und damit ist die Optimalitätsbedingung

$$u = -\lambda K^*(Ku - f) = - \int_{\Omega} k(y, \cdot) ((Ku)(y) - f(y)) dy.$$

Die Lösung ist also proportional zu einem Integral des Residuums und damit automatisch glatt, wobei die exakte Glättung jetzt wieder vom Kern  $k$  abhängt (umso glätter  $k$  ist, umso mehr wird das Bild geglättet). Da sich dies beim obigen Fall direkter auswirkt als bei der totalen Variation (dort wird nur der Subgradient geglättet, das Bild kann unstetig bleiben!), erhält man eine fast paradoxe Situation: die Regularisierung mit einem Funktional, das nur von  $u$  abhängt kann mehr glätten als die Regularisierung mit einem Funktional, das vom Gradienten abhängt.

Auch andere Funktionale in Abhängigkeit von  $u$  sind bei der Regularisierung interessant. So verwendet man bei der Rekonstruktion von Dichtebildern gerne die logarithmische Entropie

$$E(u) = \int_{\Omega} (u \log u - u) dx,$$

die natürlich nur für positive  $u$  definiert ist. Die Optimalitätsbedingung wird in diesem Fall

$$\lambda K^*(Ku - f) + \log u = 0,$$

oder äquivalent

$$u = \exp(-\lambda K^*(Ku - f)),$$

und damit ist insbesondere die Lösung  $u$  immer positiv.

Für ein diskretes Bild approximiert man den Integraloperator durch eine Quadraturformel über den Pixeln, die Approximation aller anderen Terme ist völlig analog zum Entrauschen. Um das Optimierungsproblem zu lösen, verwendet man wieder ähnliche iterative Methoden. Diesen werden wir im folgenden noch kurz untersuchen.

### 3.3 Iterative Methoden zur Bildrekonstruktion

Die einfachste iterative Methode zur Bildrekonstruktion ist ein Gradientenverfahren der Form

$$u^{k+1} = u^k - \tau(K^*(Ku^k - f) + p^k), \quad p^k \in \partial J(u^k)$$

mit einem passend gewählten Dämpfungsparameter  $\tau > 0$  und  $p^k \in \partial J(u^k)$ . Bei einem Gradienten-abhängigen Regularisierungsfunktional wird der nötige Wert  $\tau$  allerdings unrealistisch klein und das Verfahren somit ineffizient. Deshalb sollte man besser eine Iteration der Form

$$u^{k+1} = u^k - \tau(K^*(Ku_k - f) + p^{k+1}), \quad p^{k+1} \in \partial J(u^{k+1})$$

verwenden, was mit einem Dämpfungsparameter der Ordnung eins zu Konvergenz führt. Die Iterationsvorschrift ist die Optimalitätsbedingung für das Variationsproblem

$$\frac{1}{2\tau} \int (u - v_k)^2 dx + E(u), \quad v_k = u_k - \tau(K^*(Ku_k - f)).$$

Damit können wir also einen unregularisierten Gradientenschritt berechnen und danach eine Variationsmethode zum Entrauschen auf das Resultat anwenden.

In einigen Fällen erhält man Information über Bilder durch ein Zählen zufälliger Ereignisse (wie z.B. radioaktive Zerfallsdaten bei PET-Bildern), und ein passendes Modell für das Rauschen ist dann eher eine Poisson-Verteilung als das Gauss'sche Modell, das wir bisher betrachtet haben. Die log-Likelihood Funktion in diesem Fall (bzw. der Grenzwert  $N \rightarrow \infty$ ) ist dann gegeben durch

$$\int_{\Omega} (f \log \frac{f}{Ku} - f + Ku) dx,$$

und dessen Ableitung ist gegeben durch  $1 - K^*(\frac{f}{Ku})$ , unter der Annahme  $K^*1 = 1$ . Typischerweise sind die Bildern in solchen Anwendungen Dichten (z.B. jene des menschlichen Körpers) und damit nicht-negativ. Um das log-Likelihood Funktional bezüglich nichtnegativer Funktionen  $u$  zu minimieren, verwendet man dem EM oder Richardson-Lucy Algorithmus. Die Grundlage des Verfahrens ist eine Komplementaritätsbedingung bei der beschränkten Optimierung: es gilt nicht notwendigerweise  $0 = 1 - K^*(\frac{f}{Ku})(x)$  für alle  $x$ , aber

$$0 = u(1 - K * (\frac{f}{Ku})).$$

Damit hat man eine Fixpunkt-Gleichung  $u = uK * (\frac{f}{Ku})$  zu lösen, und das naheliegendste Verfahren (das EM-Verfahren) ist dann einfach die Fixpunkt-Iteration

$$u_{k+1} = u_k K^* \left( \frac{f}{Ku_k} \right).$$

Man sieht sofort, dass bei einem Integraloperator  $K$  mit positivem Kern die Iterierten  $u_k$  positiv bleiben, wenn der Anfangswert  $u_0$  positiv ist. Ähnlich zum Gradienten-Verfahren können auch regularisierte Versionen des EM-Verfahrens betrachtet werden.

### 3.4 Blind Deconvolution

Wie oben erwähnt ist der Kern nicht immer bekannt und muss ebenfalls aus Daten identifiziert werden. Wie man sich sofort überlegt, ist das Problem dann unterbestimmt, man will ja zwei Funktionen ( $u$  und  $h$ ) aus einer gemessenen ( $f$ ) bestimmen. Wegen dieser Unterbestimmtheit muss man entweder starke a-priori Annahmen an den Kern und das Bild einbringen, oder spezielle physikalische Modelle einbringen.

Oft kann man den Kern in der Form  $h(z) = H(g(z), \theta)$  schreiben, mit einem zusätzlichen Parameter  $\theta$ , der ein spezielles Setup bei der Bildaufnahme beschreibt (z.B. den Fokalfunkt der Kamera). Nimmt man nun zwei Bilder  $f_1$  und  $f_2$  für verschiedene (bekannte) Parameterwerte  $\theta_1$  und  $\theta_2$  auf, so kann man die Unterbestimmtheit umgehen. Man löst dann das System

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} H(g(x-y), \theta_1) u(y) dy &= f_1(x) \\ \int_{\mathbb{R}^d} H(g(x-y), \theta_2) u(y) dy &= f_2(x), \end{aligned}$$

also zwei nichtlineare Integralgleichungen für die beiden unbekannt Funktionen  $u$  und  $g$ . Im Unterschied zur Entzerrung mit bekanntem Kern hat man nun ein nichtlineares Problem zu lösen. Ein Beispiel eines solchen Problems ist *shape from defocus*, wo man aus zwei Bildern mit verschiedenen Fokalfunkten  $\theta_1$  und  $\theta_2$  versucht ein dreidimensionales Objekt zu rekonstruieren. Die Form des Objekts geht durch eine Parameterdarstellung der Oberfläche in die Funktion  $g$  ein und das Muster auf der Form ist durch  $u$  repräsentiert.

Bei einer Variationsmethode für blind deconvolution minimiert man ein Funktional der Form

$$\begin{aligned} J(u, g) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} H(g(x-y), \theta_1) u(y) dy - f_1(x) \right)^2 dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} H(g(x-y), \theta_2) u(y) dy - f_2(x) \right)^2 dx + E_1(u) + E_2(g), \end{aligned}$$

mit geeigneten Regularisierungsfunktionalen  $E_1$  und  $E_2$ . Meist verwendet man zur Lösung des Variationsproblems eine alternierende Minimierung, d.h. eine iterative Methode der Form

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \arg \min_g J(u_k, g) \\ u_{k+1} &= \arg \min_u J(u, g_{k+1}). \end{aligned}$$

Dabei hat man in jedem Schritt ein Problem ähnlich zu einer normalen Entzerrung zu lösen.