

Level Set Methods

Hamilton-Jacobi Equations

Motion in the Normal Direction

Ralf Engbers

ralf.engbers@gmx.de

26.04.2007

Inhalt des Vortrags

Kapitel 5 - Hamilton-Jacobi Equations

- Introduction
- Connection with Conservation Laws
- Numerical Discretization

Kapitel 6 - Motion in Normal Direction

- The Basic Equation
- Numerical Discretization
- Adding a Curvature-Dependent Term
- Adding an External Velocity Field

Einführung

Eine allgemeine Hamilton-Jacobi Gleichung hat die Form

$$\phi_t + H(\nabla\phi) = 0$$

wobei H eine Funktion der Zeit und des Raumes sein kann
Ausgeschrieben in drei Dimensionen

$$\phi_t + H(\phi_x, \phi_y, \phi_z) = 0$$

Beispiele

- Konvektion in einem extern erzeugtem Geschwindigkeitsfeld mit $H(\nabla\phi) = \vec{V} \cdot \nabla \phi$ (Kapitel 3)
- Level Set Gleichung mit $H(\nabla\phi) = V_n |\nabla\phi|$ (Kapitel 4)

Allgemeine Erhaltungsgleichung

Eindimensionale skalare Erhaltungsgleichung

$$u_t + F(u)_x = 0$$

mit der Erhaltungsgröße u und der Flussfunktion $F(u)$

Beispiel

Kontinuitätsgleichung

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

mit Dichte des Materials ρ und Geschwindigkeitsfeld des Fluides u

Verbindung zwischen HJ-Gleichungen und Erhaltungsgleichungen

Nehme erste räumlich Ableitung der eindimensionalen Hamilton-Jacobi Gleichung

$$(\phi_x)_t + H(\phi_x)_x = 0$$

und setze $u = \phi_x$, man erhält eine skalare Erhaltungsgleichung

$$u_t + H(u)_x = 0$$

Also ist Lösung u einer Erhaltungsgleichung die Ableitung einer Lösung ϕ einer Hamilton-Jacobi Gleichung und umgekehrt Lösung ϕ einer Hamilton-Jacobi Gleichung das Integral einer Lösung u einer Erhaltungsgleichung

Was bringt uns das?

Einige nützliche Tatsachen:

- Integral über eine Unstetigkeitsstelle ist ein Knick, d.h. Lösungen von Hamilton-Jacobi Gleichungen können Knicke hervorbringen, trotz glatter Anfangsdaten
- Unstetigkeiten in Lösungen von Hamilton-Jacobi Gleichungen nur dann, wenn entsprechende Erhaltungsgleichung delta Funktion hervorbringt
- Typischerweise Lösungen zu Hamilton-Jacobi Gleichungen stetig
- Lösungen zu Erhaltungsgleichungen nicht eindeutig, Entropiebedingungen zur Bestimmung physikalisch relevanter Lösungen

Was bringt uns das?

Methoden aus Theorie über Erhaltungsgleichungen genommen zur Lösung von Hamilton-Jacobi Gleichungen

Analogie zwischen Hamilton-Jacobi Gleichungen und Erhaltungsgleichungen versagt in mehreren räumlichen Dimensionen

⇒ Diskretisierung von Hamilton-Jacobi Gleichungen Dimension für Dimension

Vorwärts Euler Diskretisierung in der Zeit

Vorwärts Euler Diskretisierung in der Zeit einer Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \hat{H}^n(\phi_x^-, \phi_x^+; \phi_y^-, \phi_y^+; \phi_z^-, \phi_z^+) = 0$$

wobei $\hat{H}(\phi_x^-, \phi_x^+; \phi_y^-, \phi_y^+; \phi_z^-, \phi_z^+)$ numerische Approximation von $H(\phi_x, \phi_y, \phi_z)$

\hat{H} heißt *numerical Hamiltonian* und ist konsistent im Sinne von

$$\hat{H}^n(\phi_x, \phi_x; \phi_y, \phi_y; \phi_z, \phi_z) = H(\phi_x, \phi_y, \phi_z)$$

Räumliche Ableitungen diskretisiert mit einseitigen Differenzenquotienten,
HJ ENO oder HJ WENO

Betrachten nur zweidimensionale numerische Approximation von $H(\phi_x, \phi_y)$

Erweiterung der Zeitdiskretisierung

Analog wie in Kapitel 3, Erweiterung zu TVD Runge Kutta
CFL-Bedingung lautet

$$\Delta t \max \left\{ \frac{|H_1|}{\Delta x} + \frac{|H_2|}{\Delta y} + \frac{|H_3|}{\Delta z} \right\} < 1$$

wobei H_1, H_2, H_3 partielle Ableitungen von H bzgl. ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z

Beispiele

Konvektionsgleichung für $H(\nabla\phi) = \vec{V} \cdot \nabla\phi$ ergibt $H_1 = u, H_2 = v, H_3 = w$

Level Set Gleichung für $H(\nabla\phi) = V_n |\nabla\phi|$ ergibt $H_1 = \frac{V_N \phi_x}{|\nabla\phi|}, H_2 = \frac{V_N \phi_y}{|\nabla\phi|}, H_3 = \frac{V_N \phi_z}{|\nabla\phi|}$ unter Annahme V_N unabhängig von ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z

Lax-Friedrichs (LF) Schemata

$$\hat{H} = H \left(\frac{\phi_x^- + \phi_x^+}{2}, \frac{\phi_y^- + \phi_y^+}{2} \right) - \alpha^x \left(\frac{\phi_x^- - \phi_x^+}{2} \right) - \alpha^y \left(\frac{\phi_y^- - \phi_y^+}{2} \right)$$

mit Dissipationskoeffizienten $\alpha^x = \max |H_1(\phi_x, \phi_y)|$ und $\alpha^y = \max |H_2(\phi_x, \phi_y)|$, basierend auf partiellen Ableitungen von H

Zur Bestimmung der α 's:

- 1 identifiziere Maximum und Minimum von ϕ_x und ϕ_y , durch Betrachtung aller Werte von ϕ_x^- und ϕ_x^+ , bzw ϕ_y^- und ϕ_y^+ auf gesamtem Gitter
- 2 Setze Intervall $I^x = [\phi_x^{\min}, \phi_x^{\max}]$ und $I^y = [\phi_y^{\min}, \phi_y^{\max}]$
- 3 Setze α^x und α^y als Maximum von $|H_1(\phi_x, \phi_y)|$ bzw. $|H_2(\phi_x, \phi_y)|$ mit $\phi_x \in I^x$, $\phi_y \in I^y$

Beispiele

Konvektionsgleichung

$H_1 = u$ und $H_2 = v$ unabhängig von ϕ_x und ϕ_y , also α^x und α^y Maximum von $|u|$ und $|v|$ auf dem Gitter

Level Set Gleichung

$H_1 = \frac{V_N \phi_x}{|\nabla \phi|}$ und $H_2 = \frac{V_N \phi_y}{|\nabla \phi|}$ (Annahme V_N unabhängig von ϕ_x und ϕ_y)
 ϕ signed distance function \implies Vereinfachung zu $H_1 = V_N \phi_x$ und $H_2 = V_N \phi_y$

Spezialfall: V_N räumlich konstant; da H_1, H_2 monoton, betrachte $|H_1|$ und $|H_2|$ nur an Endpunkten von I^x und I^y und bestimme Maxima
 V_N konstant $\implies H_1 = \frac{V_N \phi_x}{|\nabla \phi|}$ hat Maximum für $|\phi_x|$ so groß und $|\phi_y|$ so klein wie möglich

Beispiele

Level Set Gleichung

V_N nicht mehr räumlich konstant \implies benötigen Abschätzung, z.B. da

$$\frac{|\phi_x|}{|\nabla\phi|} \leq 1 \quad \forall \phi_x, \phi_y$$

beschränken $|H_1| \leq |V_N|$ (gleiche Beschränkung für $|H_2|$)

Setze dann α^x, α^y als maximaler Wert von $|V_N|$ auf dem Gitter

Konsequenzen aus zu großem α

α größer gewählt als es sollte \implies erhöhte numerische Dissipation
Methode stabil und liefert genaue Lösung für verfeinertes Gitter, aber auf größerem Gitter gehen einige Details verloren

Größeres α bewirkt größere künstliche Dissipation und geringere Qualität der Lösung $\implies \alpha$ so klein wie möglich ohne Oszillationen oder physikalisch unsinnige Phänomene zu induzieren

Konvektionsgleichung

$\alpha^x = \max |u|$ wird benutzt für Region großer und kleiner Geschwindigkeit
Geschwindigkeit groß: großer Wert von α wichtig für gute Lösung
Geschwindigkeit klein: α produziert zu viel künstliche Dissipation

Stencil Lax-Friedrichs (SLF) Schema

Approximation von \hat{H}_{ij} am Gitterpunkt $\vec{x}_{ij} \implies$ benutze nur Gitterpunkte, genügend nah an \vec{x}_{ij}

Als Faustregel: $\vec{x}_{i-3,j}, \dots, \vec{x}_{i+3,j}$ in x -Richtung und $\vec{x}_{i,j-3}, \dots, \vec{x}_{i,j+3}$ in y -Richtung

\implies beinhaltet alle Gitterpunkte zur Berechnung von ϕ_x^\pm und ϕ_y^\pm mit HJ WENO Schema

Diese Art Schema heißt *Stencil Lax-Friedrichs* (SLF) Schema

Local Lax-Friedrichs (LLF) und Local Local Lax-Friedrichs (LLLF) Schema

I^x für α^x nur unter Benutzung ϕ_x^- und ϕ_x^+ , I^y nach LF oder SLF Schema
 \implies *Local Lax-Friedrichs* (LLF) Schema (bzw. SLLF Schema, falls SLF für I^y benutzt)

I^x über ϕ_x^- und ϕ_x^+ und I^y über ϕ_y^- und ϕ_y^+ und benutzt beide Intervalle für α^x und α^y
 \implies *Local Local Lax-Friedrichs* (LLLF) Schema

Local Lax-Friedrichs (LLF) und Local Local Lax-Friedrichs (LLLF) Schema

H separabel, d.h.

$$H(\phi_x, \phi_y) = H^x(\phi_x) + H^y(\phi_y)$$

dann reduziert sich LLLF zu LLF, da α^x von ϕ_y und α^y von ϕ_x unabhängig

H nicht separabel, LLF und LLLF wirklich voneinander verschiedene Schemata

In der Praxis ist LLF das beste Schema (auch ist es monoton); LF und SLF sind zu dissipativ und LLLF ist nicht dissipativ genug.

Einschub: Monotone Schemata

Ein Schema heißt *monoton*, wenn ϕ^{n+1} eine nicht fallende Funktion aller ϕ^n ist

monotone Schemata konvergieren gegen korrekte Lösung, obwohl nur erster Ordnung

Numerical Hamiltonians in Verbindung mit monotonen Schemata wichtig

Roe-Fix (RF) Schema

$$\hat{H} = H(\phi_x^*, \phi_y^*) - \alpha^x \left(\frac{\phi_x^+ - \phi_x^-}{2} \right) - \alpha^y \left(\frac{\phi_y^+ - \phi_y^-}{2} \right)$$

wobei gewöhnlich $\alpha^x = \alpha^y = 0$ um Terme für numerische Dissipation zu entfernen, I^x und I^y werden bestimmt wie in LLLF

betrachte partiellen Ableitungen H_1 und H_2 um upwinding zu benutzen

- H_1 und H_2 kein Vorzeichenwechsel für alle $\phi_x \in I^x$ und $\phi_y \in I^y$
 - $\alpha^x = \alpha^y = 0$
 - $H_1 > 0$ Informationen gehen von links nach rechts: $\phi_x^* = \phi_x^-$
 - $H_1 < 0$ Informationen gehen von rechts nach links: $\phi_x^* = \phi_x^+$
- H_1 oder H_2 Vorzeichenwechsel
 - *sonic point*, d.h. ein Punkt mit $H_1 = 0$ oder $H_2 = 0$
 - potentiell nichteindeutige Lösungen \implies künstliche Dissipation um korrekte *vanishing viscosity solution* zu erhalten
 - Wechsel zu LLF Schema

Umgang mit sonic points

Vorgehen:

- H_1 kein Vorzeichenwechsel $\forall \phi_x \in I_{LLF}^x, \phi_y \in I_{LLF}^y \implies$ setzen $\alpha^x = 0$ und ϕ_x^* gleich ϕ_x^- oder ϕ_x^+
- H_2 Vorzeichenwechsel, setzen $\phi_y^* = \frac{\phi_y^- + \phi_y^+}{2}$ und α^y gemäß LLF
- analog falls H_1 Vorzeichenwechsel
- H_1 und H_2 Vorzeichenwechsel \implies standard LLF

Nicht entscheidbar ob unwinding nutzbar ohne Bestimmung von ϕ_x^\pm und ϕ_y^\pm
 Berechne ϕ_x^\pm und ϕ_y^\pm mit vorwärts und rückwärts Differenzenquotienten um zu Entscheiden ob unwinding möglich, danach benutze HJ (W)ENO zur eigentlichen Berechnung

Sonic points treten nur selten auf, man spart sich das aufwändige HJ WENO

Godunov's Schema

$$\hat{H} = \text{ext}_x \text{ext}_y H(\phi_x, \phi_y)$$

Intervalle I^x und I^y nach LLLF

Definition von $\text{ext}_x H$

- $\phi_x^- < \phi_x^+ \implies \text{ext}_x H = \min(H) \quad \forall \phi_x \in I^x$
- $\phi_x^- > \phi_x^+ \implies \text{ext}_x H = \max(H) \quad \forall \phi_x \in I^x$
- $\phi_x^- = \phi_x^+ \implies \text{ext}_x H = \phi_x^- = \phi_x^+$

Generell gilt: $\text{ext}_x \text{ext}_y H \neq \text{ext}_y \text{ext}_x H$, deshalb verschiedene Versionen
 Oft gilt aber Gleichheit (z.B. H separabel), deshalb kein Problem

Godunov's Schema: Beispiel Konvektionsgleichung

Konvektionsgleichung

x und y Richtung voneinander unabhängig, H separabel

$$\text{ext}_x \text{ext}_y H = \text{ext}_x(u \phi_x) + \text{ext}_y(v \phi_x)$$

Falls $\phi_x^- < \phi_x^+$, wollen Minimum von $u \phi_x$

Falls $\phi_x^- > \phi_x^+$, wollen Maximum von $u \phi_x$

- $u > 0$ benutze ϕ_x^-
- $u < 0$ benutze ϕ_x^+
- $u = 0$ setze $u \phi_x = 0$

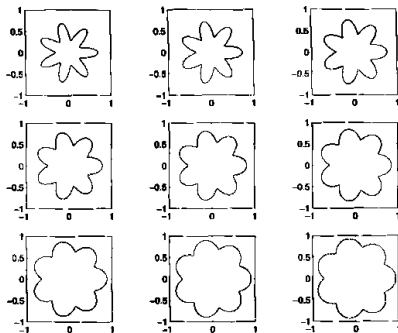
$\implies u \phi_x$ eindeutig bestimmt (Standard upwinding Methode aus Kapitel 3)

Bewegung in Normalenrichtung

Betrachtung konstanter Bewegung einer Oberfläche in Normalenrichtung unter einem intern erzeugten Geschwindigkeitsfeld $\vec{V} = a\vec{N}$ oder $V_n = a$ mit der Konstanten a

Entsprechende Level Set Gleichung:

$$\phi_t + a|\nabla\phi| = 0$$



Vorteil von signed distance functions

ϕ signed distance function ($|\nabla \phi| = 1$), Level Set Gleichung wird zu:

$$\phi_t = -a$$

Vorwärts Euler Verfahren ergibt

$$\phi^{n+1} = \phi^n - a\Delta t$$

Zur Verdeutlichung:

Mit $a > 0$ wird $\phi = 0$ Isokontur nach einem Zeitschritt zur $\phi = -a \Delta t$ Isokontur und $\phi = a\Delta t$ zu $\phi = 0$, d.h. die Oberfläche bewegt sich mit Geschwindigkeit a in Normalenrichtung

Vorteil von signed distance functions

Betrachte Gradient eines Zeitschritts

$$\nabla\phi^{n+1} = \nabla\phi^n - \nabla(a\Delta t)$$

$a \Delta t$ konstant, also folgt aus $\nabla(a\Delta t) = 0$

$$\nabla\phi^{n+1} = \nabla\phi^n$$

Das bedeutet, ist ϕ^n signed distance function, bleibt es signed distance function für jeden Zeitschritt

Erzeugen Ausgangsdaten signed distance function, wird durch Vorwärts Euler Verfahren das Problem reduziert auf Lösung der ODE $\phi_t = -a$ unabhängig für jeden Gitterpunkt

Da a konstant ergibt dies sogar exakte Lösung

Vorteil von signed distance functions - Beispiel

Betrachte Punkt $\phi = \phi_0 > 0$, der ϕ_0 Einheiten von Oberfläche entfernt ist
In Δt Zeiteinheiten wird Oberfläche um $a\Delta t$ Einheiten näher kommen und ändert den Wert dieses Punktes auf $\phi_0 - a\Delta t$, was genau dem Wert durch Vorwärts Euler entspricht

Genauer Zeitpunkt, wann Oberfläche Punkt erreicht

$$\phi_0 - at = 0 \quad \iff \quad t = \frac{\phi_0}{a}$$

Haben wir also signed distance function ist exakte Lösung von $\phi_t + a|\nabla\phi| = 0$ gegeben durch

$$\phi(t) = \phi_0 - at$$

Haben wir keine signed distance function \implies Behandlung als Hamilton-Jacobi Gleichung und numerische Berechnung

Upwinding

Wir wollen

$$\phi_t + a\vec{N} \cdot \nabla\phi = 0$$

bzw.

$$\phi_t + \left(\frac{a\phi_x}{|\nabla\phi|}, \frac{a\phi_y}{|\nabla\phi|}, \frac{a\phi_z}{|\nabla\phi|} \right) \cdot \nabla\phi = 0$$

diskretisieren mit einfachem upwinding

Dazu betrachte ersten räumlichen Term $a\phi_x|\nabla\phi|^{-1}\phi_x$, wobei $a\phi_x|\nabla\phi|^{-1}$ die 'Geschwindigkeit' in x -Richtung ist

Für upwinding nur Vorzeichen von $a\phi_x$ wichtig (Annahme: $|\nabla\phi| \neq 0$)

Upwinding

ϕ_x^- und ϕ_x^+ gleiche Vorzeichen \implies beide möglich für $a\phi_x$

Beispiel

Sei $a > 0$. Wenn $\phi_x^- > 0$ und $\phi_x^+ > 0$, dann $a\phi_x > 0 \implies$ benutze ϕ_x^-

Wenn $\phi_x^- < 0$ und $\phi_x^+ < 0$, dann $a\phi_x < 0 \implies$ benutze ϕ_x^+

Upwinding

Sei $\phi_x^- < 0$ und $\phi_x^+ > 0$

wegen $a\phi_x^- < 0$ benutze ϕ_x^-

wegen $a\phi_x^+ > 0$ benutze ϕ_x^+

Man erhält einen V-artigen Bereich

\implies durch ϕ_x^- und ϕ_x^+ definierte LLLF Intervall enthält sonic point mit $\phi_x = 0$

Analog erhält man für $\phi_x^- > 0$ und $\phi_x^+ < 0$ einen Bereich in der Form eines umgedrehten V's

Umgang mit sonic points

Hamilton-Jacobi Form unserer Gleichung mit $H_1 = a\phi_x |\nabla\phi|^{-1}$

Vorzeichen von H_1 unabhängig von y und z Richtung, hängt nur von $a\phi_x$ ab

Haben ϕ_x^- und ϕ_x^+ selbe Vorzeichen, wähle nach Vorzeichen von H_1 (normales upwinding)

ϕ_x^- und ϕ_x^+ unterschiedliche Vorzeichen \implies sonic point, wechsel zu LLF Methode, füge künstliche Dissipation hinzu

Numerische Dissipation kann Details der Lösung auf groben Gittern verwischen

Um künstliche Dissipation zu verhindern, wechsel zu Godunov's Schema

Godunov's Schema im Detail

Sei $a > 0$

- ϕ_x^- und ϕ_x^+ positiv $\implies \text{ext}_x$ minimiert H , falls $\phi_x^- < \phi_x^+$ und maximiert H , falls $\phi_x^- > \phi_x^+$
In beiden Fällen wähle ϕ_x^-
- ϕ_x^- und ϕ_x^+ negativ $\implies \text{ext}_x$ minimiert H , falls $\phi_x^- < \phi_x^+$ und maximiert H , falls $\phi_x^- > \phi_x^+$
In beiden Fällen wähle ϕ_x^+
- $\phi_x^- < 0$ und $\phi_x^+ > 0$, also $\phi_x^- < \phi_x^+ \implies H$ hat Minimum durch Setzen von $\phi_x = 0$
Impliziert: Für regions of expansion sollte lokal gelten $\phi_x = 0$
- $\phi_x^- > 0$ und $\phi_x^+ < 0$, also $\phi_x^- > \phi_x^+ \implies H$ hat Maximum durch Setzen von ϕ_x gleich größtem Wert von $|\phi_x^-|$ und $|\phi_x^+|$
Information von beiden Seiten, schnellere kommt zuerst an

Godunov's Methode wählt sinnvollste Lösung ohne Gebrauch von Dissipation.

Ergänze krümmungsabhängigen Term

Motivation

Flammen brennen gemäß eines Geschwindigkeitsfeld in Normalenrichtung plus extra Erwärmung und Kühlung abhängig von der Krümmung der Flammenfront

Modelliere Geschwindigkeitsfeld durch $V_n = a - b\kappa$ und betrachte Level Set Gleichung mit

$$\phi_t + a|\nabla\phi| = b\kappa|\nabla\phi|$$

Ergänze krümmungsabhängigen Term

Hyperbolischer Term $a|\nabla \phi|$ diskretisiert entsprechend Hamilton-Jacobi Gleichungen

Parabolischer Term $b\kappa|\nabla \phi|$ unabhängig diskretisiert unter Benutzung von zentralen Differenzenquotienten (gemäß Kapitel 4)

Zeitdiskretisierung sowohl Vorwärts Euler als auch Runge Kutta möglich

Kombinierte CFL-Bedingung sieht wie folgt aus:

$$\Delta t \left(\frac{|H_1|}{\Delta x} + \frac{|H_2|}{\Delta y} + \frac{|H_3|}{\Delta z} + \frac{2b}{(\Delta x)^2} + \frac{2b}{(\Delta y)^2} + \frac{2b}{(\Delta z)^2} \right) < 1$$

Ergänze externes Geschwindigkeitsfeld

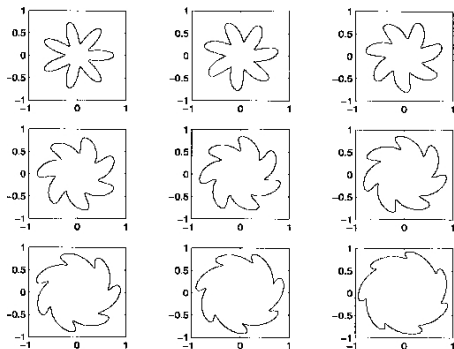
Motivation

Wir haben schon eine Gleichung für eine Flammenfront, die sich durch in Ruhe befindliches Material brennt. Als nächstes wollen wir einen Term hinzufügen, der die Geschwindigkeit des nicht-verbrannten Materials berücksichtigt.

$$\phi_t + \vec{V} \cdot \nabla \phi + a|\nabla \phi| = b\kappa|\nabla \phi|$$

Gleichung ist Kombination aus externem Geschwindigkeitsfeld, Bewegung in Normalenrichtung und Bewegung durch mittlere Krümmung und ist allgemeinste Form der G-Gleichung für Flammenfront

Beispiel



Entwicklung einer sternförmigen Oberfläche unter Einfluss einer extern gegebenen Rotation ($a \vec{V} \cdot \nabla \phi$) und einer selbst generierten Bewegung in Normalenrichtung nach außen ($a|\nabla \phi|$).

Diskretisierung

Parabolischer Term $b\kappa|\nabla\phi|$ wieder unabhängig mit zentralen Differenzenquotienten diskretisieren (Kapitel 4)

Hyperbolischer Hamilton-Jacobi Teil besteht aus $\vec{V} \cdot \nabla \phi$ und $a|\nabla\phi|$
Betrachte partiellen Ableitungen

$$H_1 = u + \frac{a\phi_x}{|\nabla\phi|} \quad \text{und} \quad H_2 = v + \frac{a\phi_y}{|\nabla\phi|}$$

Erster Term von H_1 : Bewegung gemäß externen Geschwindigkeitsfeld
Zweiter Term von H_1 : Bewegung der Oberfläche normal zu sich selbst

Upwinding

u und $a\phi_x$ gleiche Vorzeichen für ϕ_x^- und ϕ_x^+

\implies externes Geschwindigkeitsfeld und selbst erzeugte Geschwindigkeit bewegen Front der Oberfläche in selbe Richtung

Beispiel

ϕ_x^- und ϕ_x^+ positiv

- zweiter Term von H_1 gibt an Front bewegt sich nach rechts
- ist $u > 0$ externe Geschwindigkeit bewegt Front ebenfalls nach rechts
- RF und Godunov setzen $\phi_x = \phi_x^-$

Upwinding

u und $a\phi_x$ ungleiche Vorzeichen

- Terme bewegen Front in unterschiedliche Richtungen
- für upwinding wichtig welcher Term dominiert
- Vorteilhaft: ϕ signed distance function $\implies H_1 = u + a\phi_x$

H_1 für ϕ_x^- und ϕ_x^+ positiv \implies RF und Godunov setzen $\phi_x = \phi_x^-$

H_1 für ϕ_x^- und ϕ_x^+ negativ \implies RF und Godunov setzen $\phi_x = \phi_x^+$

Upwinding

$H_1 < 0$ für ϕ_x^- und $H_1 > 0$ für ϕ_x^+

Sei $\phi_x^- < \phi_x^+$

- Godunov wählt Minimum von H
- $H_1 = 0 \implies \phi_x = -\frac{u}{a}$

Sei $\phi_x^- > \phi_x^+$

- Godunov wählt Maximum von H
- $H_1 = 0 \implies \phi_x = -\frac{u}{a}$

$H_1 > 0$ für ϕ_x^- und $H_1 < 0$ für ϕ_x^+

- Godunov setzt ϕ_x gleich dem Wert von ϕ_x^- oder ϕ_x^+ , der den größten Wert von H_1 ergibt

Upwinding

ϕ keine signed distance function

Im Allgemeinen: $H_1 = u + a\phi_x |\nabla\phi|^{-1}$ und wir müssen nicht nur I^x berücksichtigen, sondern auch ϕ_y und ϕ_z in I^y und I^z
 \implies kann sehr schnell ziemlich kompliziert werden

Auch RF kann ziemlich kompliziert werden, da schwierig zu entscheiden ob sonic points nahe sind oder nicht

In solchen Fällen LLF ideal, da man nur Werte von ϕ_x^- und ϕ_x^+ und ein wenig künstliche Dissipation benutzt

Maximum von $|H_1|$ wirkt schwierig zu berechnen $\implies \alpha$ größer setzen und Preis dafür zahlen