

Surface Reconstruction

Nail El-Sourani

May 24, 2007

Motivation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi
Delaunay
Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model
Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Oberflächenrekonstruktion hat viele Anwendungsgebiete

Motivation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Oberflächenrekonstruktion hat viele Anwendungsgebiete:
- Medizin, Computergrafik etc.

Motivation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Oberflächenrekonstruktion hat viele Anwendungsgebiete:
- Medizin, Computergrafik etc.
- keine neue Problematik

Motivation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Oberflächenrekonstruktion hat viele Anwendungsgebiete:
- Medizin, Computergrafik etc.
- keine neue Problematik
- daher mehrere verschiedene Lösungsansätze

Überblick

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi
Delaunay
Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model
Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- kurz: bisherige Methoden

Überblick

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- kurz: bisherige Methoden
- Lösungsansätze via Level-Sets

Überblick

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- kurz: bisherige Methoden
- Lösungsansätze via Level-Sets
 - Minimal Surface Model

Überblick

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- kurz: bisherige Methoden
- Lösungsansätze via Level-Sets
 - Minimal Surface Model
 - Convection Model

Überblick

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- kurz: bisherige Methoden
- Lösungsansätze via Level-Sets
 - Minimal Surface Model
 - Convection Model
- Numerische Implementierung

Unterteilung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Die meisten bisherigen Problemlösungen basieren auf

Unterteilung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Die meisten bisherigen Problemlösungen basieren auf

- parametrischen Verfahren (meist Voronoi, Delaunay)

Die meisten bisherigen Problemlösungen basieren auf

- parametrischen Verfahren (meist Voronoi, Delaunay)

Die Level-Set Methode hingegen

- Die meisten bisherigen Problemlösungen basieren auf
- parametrischen Verfahren (meist Voronoi, Delaunay)
- Die Level-Set Methode hingegen
- ist ein implizites Verfahren

Voronoi Feld

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Voronoi Diagramme benutzen Polygone, um die Oberfläche zu approximieren. Alle Punkte einer Polygonfläche haben gemeinsam, dass sie am nächsten zu dem Meßpunkt liegen, der in diesem Polygon liegt. Die Konstruktion erfolgt in zwei Schritten:

Voronoi Feld

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Voronoi Diagramme benutzen Polygone, um die Oberfläche zu approximieren. Alle Punkte einer Polygonfläche haben gemeinsam, dass sie am nächsten zu dem Meßpunkt liegen, der in diesem Polygon liegt. Die Konstruktion erfolgt in zwei Schritten:

- Meßpunkt mit allen direkten Nachbarn verbinden

Voronoi Feld

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Voronoi Diagramme benutzen Polygone, um die Oberfläche zu approximieren. Alle Punkte einer Polygonfläche haben gemeinsam, dass sie am nächsten zu dem Meßpunkt liegen, der in diesem Polygon liegt. Die Konstruktion erfolgt in zwei Schritten:

- Meßpunkt mit allen direkten Nachbarn verbinden
- Mittelsenkrechte dieser Verbindungen einzeichnen

Voronoi Diagramme benutzen Polygone, um die Oberfläche zu approximieren. Alle Punkte einer Polygonfläche haben gemeinsam, dass sie am nächsten zu dem Meßpunkt liegen, der in diesem Polygon liegt. Die Konstruktion erfolgt in zwei Schritten:

- Meßpunkt mit allen direkten Nachbarn verbinden
- Mittelsenkrechte dieser Verbindungen einzeichnen

Durch die Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten ist dann das meßpunktumgebende Polygon gegeben.

Voronoi Feld

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

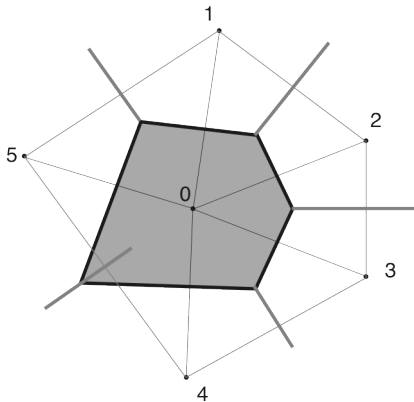


Figure: Voronoi Feld

Delaunay-Triangulation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Die Delaunay Triangulation basiert darauf, dass alle Meßpunkte so verbunden werden das ein Dreiecksnetz entsteht. Die einzige Bedingung ist, dass der Kreis, auf dem alle drei Punkte eines Dreiecks liegen, keinen anderen Meßpunkt enthält. Konstruktion in zwei Schritten:

Delaunay-Triangulation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Die Delaunay Triangulation basiert darauf, dass alle Meßpunkte so verbunden werden das ein Dreiecksnetz entsteht. Die einzige Bedingung ist, dass der Kreis, auf dem alle drei Punkte eines Dreiecks liegen, keinen anderen Meßpunkt enthält. Konstruktion in zwei Schritten:

- Erzeugen eines beliebigen Dreiecksnetzes

Delaunay-Triangulation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Die Delaunay Triangulation basiert darauf, dass alle Meßpunkte so verbunden werden das ein Dreiecksnetz entsteht. Die einzige Bedingung ist, dass der Kreis, auf dem alle drei Punkte eines Dreiecks liegen, keinen anderen Meßpunkt enthält. Konstruktion in zwei Schritten:

- Erzeugen eines beliebigen Dreiecksnetzes
- Ausführen eines Flips, sollte die Delaunay-Bedingung verletzt sein

Delaunay-Triangulation

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

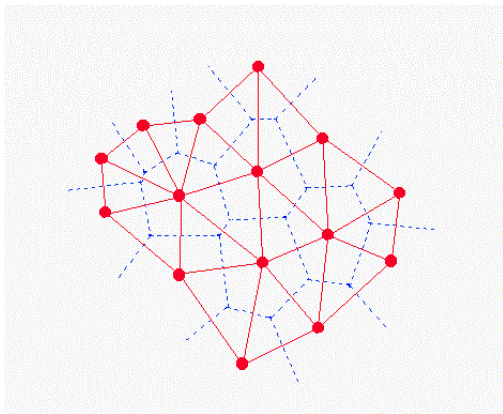


Figure: Delaunay-Triangulation

Parametrische Verfahren

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- generell schwer die richtigen Verbindungen im Dreidimensionalen zu finden

Parametrische Verfahren

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- generell schwer die richtigen Verbindungen im Dreidimensionalen zu finden
- für obige Verfahren problematisch mit Noise umzugehen

Parametrische Verfahren

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- generell schwer die richtigen Verbindungen im Dreidimensionalen zu finden
- für obige Verfahren problematisch mit Noise umzugehen
- rekonstruierte Oberflächen nur stückweise linear

Unterschiedliche Modelle

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ein besseres Ergebnis ist durch Level-Sets zu erzielen. Hier wird einer kontinuierlichen Verformung nachgegangen bishin zum Ergebnis. Die Level-Set Methode wird benutzt, um die Verformungen an bestimmten Zeitpunkten zu erfassen. Wie wir später sehen werden, hängt der Verlauf der Verformungen vom Gradientenfluss ab, für den hier zwei mögliche Modelle vorgestellt werden sollen:

Unterschiedliche Modelle

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ein besseres Ergebnis ist durch Level-Sets zu erzielen. Hier wird einer kontinuierlichen Verformung nachgegangen bishin zum Ergebnis. Die Level-Set Methode wird benutzt, um die Verformungen an bestimmten Zeitpunkten zu erfassen. Wie wir später sehen werden, hängt der Verlauf der Verformungen vom Gradientenfluss ab, für den hier zwei mögliche Modelle vorgestellt werden sollen:

- Minimal Surface Model

Unterschiedliche Modelle

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ein besseres Ergebnis ist durch Level-Sets zu erzielen. Hier wird einer kontinuierlichen Verformung nachgegangen bishin zum Ergebnis. Die Level-Set Methode wird benutzt, um die Verformungen an bestimmten Zeitpunkten zu erfassen. Wie wir später sehen werden, hängt der Verlauf der Verformungen vom Gradientenfluss ab, für den hier zwei mögliche Modelle vorgestellt werden sollen:

- Minimal Surface Model
- Convection Model

Unterschiedliche Modelle

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ein besseres Ergebnis ist durch Level-Sets zu erzielen. Hier wird einer kontinuierlichen Verformung nachgegangen bishin zum Ergebnis. Die Level-Set Methode wird benutzt, um die Verformungen an bestimmten Zeitpunkten zu erfassen. Wie wir später sehen werden, hängt der Verlauf der Verformungen vom Gradientenfluss ab, für den hier zwei mögliche Modelle vorgestellt werden sollen:

- Minimal Surface Model
- Convection Model

Die Unterschiede werden später ersichtlich.

Vorgehensweise

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Eckpunkte der Vorgehensweise sind folgende:

Eckpunkte der Vorgehensweise sind folgende:

- Es wird eine Formulierung benutzt, die nur auf der Distanzfunktion zu einem Datensatz basiert (kann Punkte, Kurven, etc. enthalten).

Eckpunkte der Vorgehensweise sind folgende:

- Es wird eine Formulierung benutzt, die nur auf der Distanzfunktion zu einem Datensatz basiert (kann Punkte, Kurven, etc. enthalten).
- Je nach Modell:

Eckpunkte der Vorgehensweise sind folgende:

- Es wird eine Formulierung benutzt, die nur auf der Distanzfunktion zu einem Datensatz basiert (kann Punkte, Kurven, etc. enthalten).
- Je nach Modell:
 - mit skalierbarem Parameter für variable Flexibilität eine weicher als stückweise lineare Oberfläche konstruiert (MSM)

Eckpunkte der Vorgehensweise sind folgende:

- Es wird eine Formulierung benutzt, die nur auf der Distanzfunktion zu einem Datensatz basiert (kann Punkte, Kurven, etc. enthalten).
- Je nach Modell:
 - mit skalierbarem Parameter für variable Flexibilität eine weicher als stückweise lineare Oberfläche konstruiert (MSM)
 - etwas schlechtere Polygon/Polyeder Oberfläche ohne Flexibilität (CM)

Eckpunkte der Vorgehensweise sind folgende:

- Es wird eine Formulierung benutzt, die nur auf der Distanzfunktion zu einem Datensatz basiert (kann Punkte, Kurven, etc. enthalten).
- Je nach Modell:
 - mit skalierbarem Parameter für variable Flexibilität eine weicher als stückweise lineare Oberfläche konstruiert (MSM)
 - etwas schlechtere Polygon/Polyeder Oberfläche ohne Flexibilität (CM)
- Die Level-Set Methode liefert uns dann implizit eine gute rekonstruierte Oberfläche.

Vorgehensweise

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Komplizierte topologische Verhältnisse und verrauschte Datensätze können leicht behandelt werden.

Vorgehensweise

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Komplizierte topologische Verhältnisse und verrauschte Datensätze können leicht behandelt werden.
- Methoden sind leicht skalierbar und funktionieren in beliebiger Dimension.

Vorgehensweise

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Komplizierte topologische Verhältnisse und verrauschte Datensätze können leicht behandelt werden.
- Methoden sind leicht skalierbar und funktionieren in beliebiger Dimension.
- Auch als Postprocessing verwendbar.

Oberflächenenergie

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Sei S der Datensatz. Definiere $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, S)$ als Distanzfunktion zu S .

Oberflächenenergie

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Sei S der Datensatz. Definiere $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, S)$ als Distanzfunktion zu S . Dann sei die Oberflächenenergie gegeben durch:

$$E(\Gamma) = \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{1/p}$$

Oberflächenenergie

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Sei S der Datensatz. Definiere $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, S)$ als Distanzfunktion zu S . Dann sei die Oberflächenenergie gegeben durch:

$$E(\Gamma) = \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{1/p}$$

Wobei Γ eine willkürliche Oberfläche sei.

Oberflächenenergie

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Sei S der Datensatz. Definiere $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, S)$ als Distanzfunktion zu S . Dann sei die Oberflächenenergie gegeben durch:

$$E(\Gamma) = \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{1/p}$$

Wobei Γ eine willkürliche Oberfläche sei. Dieses Energiefunktional ist unabhängig von Parametrisierung und invariant unter Rotation und Translation.

Oberflächenenergie

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Sei S der Datensatz. Definiere $d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, S)$ als Distanzfunktion zu S . Dann sei die Oberflächenenergie gegeben durch:

$$E(\Gamma) = \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{1/p}$$

Wobei Γ eine willkürliche Oberfläche sei. Dieses Energiefunktional ist unabhängig von Parametrisierung und invariant unter Rotation und Translation. Ist $p = \infty$, so ist $E(\Gamma)$ der Wert der Distanz zu dem entferntesten Punkt auf Γ .

Minimum finden

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Das lokale Minimum des Energiefunktional verhält sich offensichtlich wie eine minimale Oberfläche oder eine elastische Membran zu dem Datensatz. Die erste Ableitung der Oberflächenenergie läßt sich wie folgt berechnen

Minimum finden

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Das lokale Minimum des Energiefunktionals verhält sich offensichtlich wie eine minimale Oberfläche oder eine elastische Membran zu dem Datensatz. Die erste Ableitung der Oberflächenenergie läßt sich wie folgt berechnen:

$$\frac{\partial E(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{1}{p} \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} [p d^{p-1} \nabla d \cdot \mathbf{n} + d^p \kappa]$$

Minimum finden

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Das lokale Minimum des Energiefunktionals verhält sich offensichtlich wie eine minimale Oberfläche oder eine elastische Membran zu dem Datensatz. Die erste Ableitung der Oberflächenenergie läßt sich wie folgt berechnen:

$$\frac{\partial E(\Gamma)}{\partial \Gamma} = \frac{1}{p} \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} [p d^{p-1} \nabla d \cdot \mathbf{n} + d^p \kappa]$$

Wobei \mathbf{n} der Normalenvektor und κ die Krümmung ist.

Euler-Lagrange

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(\Gamma)}{\partial \Gamma} &= \frac{1}{p} \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} [p d^{p-1} \nabla d \cdot \mathbf{n} + d^p \kappa] \\ &= \left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1} \left[\nabla d \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{p} d \kappa \right]\end{aligned}$$

Euler-Lagrange

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ergibt sich die Euler-Lagrange Gleichung:

Euler-Lagrange

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ergibt sich die Euler-Lagrange Gleichung:

$$d^{p-1}(\mathbf{x})[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{\rho} d(\mathbf{x})\kappa] = 0$$

Euler-Lagrange

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ergibt sich die Euler-Lagrange Gleichung:

$$d^{p-1}(\mathbf{x})[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{\rho} d(\mathbf{x})\kappa] = 0$$

Gilt dies, so haben wir unser lokales Minimum gefunden und somit die Oberfläche bezüglich unserer Bedürfnisse minimiert.

Euler-Lagrange

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Außerdem ist hier eine Balance zwischen der Potentialkraft $\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ (dem Zug zu Datenpunkten hin) und der Oberflächenspannung $d(\mathbf{x})\kappa$ (dem Zug zur glatten Oberfläche) zu sehen.

Euler-Lagrange

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Außerdem ist hier eine Balance zwischen der Potentialkraft $\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ (dem Zug zu Datenpunkten hin) und der Oberflächenspannung $d(\mathbf{x})\kappa$ (dem Zug zur glatten Oberfläche) zu sehen. Zudem läßt sich die Flexibilität der Oberfläche durch den Parameter p beeinflussen (Im Allgemeinen ist $p = 1$ oder $p = 2$ eine gute Wahl).

Potentialkraft/Oberflächenspannung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

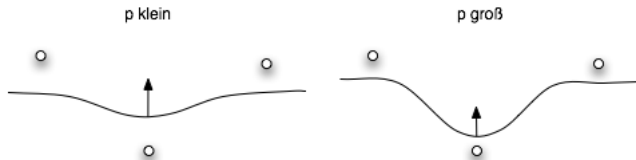
Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende



$$\left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{\rho} d(\mathbf{x}) \kappa \right]$$

lokales Minimum

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Unter Berücksichtigung der Distanzfunktion $d(x)$ existieren für das Energiefunktional genau zwei globale Minima, nämlich

lokales Minimum

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Unter Berücksichtigung der Distanzfunktion $d(x)$ existieren für das Energiefunktional genau zwei globale Minima, nämlich

- $\Gamma = \Gamma_0$

lokales Minimum

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Unter Berücksichtigung der Distanzfunktion $d(x)$ existieren für das Energiefunktional genau zwei globale Minima, nämlich

- $\Gamma = \Gamma_0$
- $\Gamma = \emptyset$

Der zweite Fall ist für uns irrelevant, sodass wir uns darauf beschränken, eine Annäherung an den ersten Fall zu finden. Daher suchen wir ein lokales Minimum, welches obige Euler-Lagrange Gleichung erfüllt.

lokales Minimum

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Unter Berücksichtigung der Distanzfunktion $d(x)$ existieren für das Energiefunktional genau zwei globale Minima, nämlich

- $\Gamma = \Gamma_0$
- $\Gamma = \emptyset$

Der zweite Fall ist für uns irrelevant, sodass wir uns darauf beschränken, eine Annäherung an den ersten Fall zu finden. Daher suchen wir ein lokales Minimum, welches obige Euler-Lagrange Gleichung erfüllt. Die Qualität unserer Lösung hängt dabei im Wesentlichen davon, ab wie gut die Meßpunkte die zu rekonstruierende Oberfläche auflösen.

Deformation nach Gradientenfluß

Wir starten mit einer willkürlichen Anfangsoberfläche Γ , die alle Meßpunkte umschließt.

Surface Re-
construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige
Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set
Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische
Implemen-
tierung

Convection Model

Ende

Deformation nach Gradientenfluß

Wir starten mit einer willkürlichen Anfangsoberfläche Γ , die alle Meßpunkte umschließt. Wir bilden nun den Gradientenfluss, dem wir mit unserer Oberfläche Γ folgen wollen, bis wir eine möglichst gute Annäherung erreicht haben.

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi
Delaunay
Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model
Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Deformation nach Gradientenfluß

Wir starten mit einer willkürlichen Anfangsoberfläche Γ , die alle Meßpunkte umschließt. Wir bilden nun den Gradientenfluss, dem wir mit unserer Oberfläche Γ folgen wollen, bis wir eine möglichst gute Annäherung erreicht haben. Dabei leitet sich der Gradientenfluss wie folgt von der Ableitung des Energiefunktionals ab:

Surface Re-
construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige
Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set
Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische
Implemen-
tierung

Convection Model

Ende

Deformation nach Gradientenfluß

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir starten mit einer willkürlichen Anfangsoberfläche Γ , die alle Meßpunkte umschließt. Wir bilden nun den Gradientenfluss, dem wir mit unserer Oberfläche Γ folgen wollen, bis wir eine möglichst gute Annäherung erreicht haben. Dabei leitet sich der Gradientenfluss wie folgt von der Ableitung des Energiefunktionals ab:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\frac{E(\Gamma)}{\Gamma}\right]\mathbf{n}$$

Deformation nach Gradientenfluß

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir starten mit einer willkürlichen Anfangsoberfläche Γ , die alle Meßpunkte umschließt. Wir bilden nun den Gradientenfluss, dem wir mit unserer Oberfläche Γ folgen wollen, bis wir eine möglichst gute Annäherung erreicht haben. Dabei leitet sich der Gradientenfluss wie folgt von der Ableitung des Energiefunktionals ab:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\frac{E(\Gamma)}{\Gamma}\right]\mathbf{n}$$

Ausgeschrieben also:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{p} d(\mathbf{x}) \kappa\right] \mathbf{n}$$

Deformation nach Gradientenfluß

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

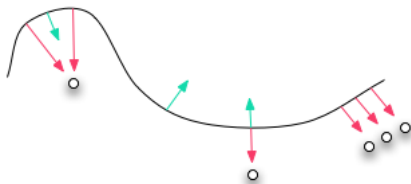
Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende



Deformation nach Gradientenfluß

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

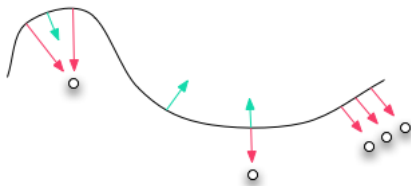
Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implementierung

Convection Model

Ende



- Faktor $-\left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x})$ sorgt dafür, dass die am weitesten entfernten Punkte sich am schnellsten Richtung Datensatz bewegen

Deformation nach Gradientenfluß

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

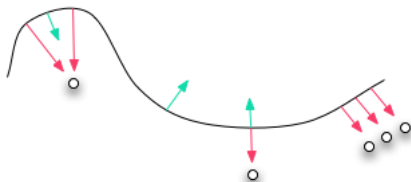
Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implementierung

Convection Model

Ende



- Faktor $-\left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x})$ sorgt dafür, dass die am weitesten entfernten Punkte sich am schnellsten Richtung Datensatz bewegen
- Equilibrium erreicht wenn $\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{p} d(\mathbf{x}) \kappa$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir betrachten eine Oberfläche $\Gamma(t)$ in R^n , die sich mit der Zeit bewegt. Sei $\Omega(t)$ die von $\Gamma(t)$ eingeschlossene Region. $\phi(\mathbf{x}, t)$ sei die mit $\Omega(t)$ verknüpfte Level-Set Funktion,

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir betrachten eine Oberfläche $\Gamma(t)$ in R^n , die sich mit der Zeit bewegt. Sei $\Omega(t)$ die von $\Gamma(t)$ eingeschlossene Region. $\phi(\mathbf{x}, t)$ sei die mit $\Omega(t)$ verknüpfte Level-Set Funktion, dann

- $\phi(\mathbf{x}, t) > 0$ in $\Omega(t)$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir betrachten eine Oberfläche $\Gamma(t)$ in R^n , die sich mit der Zeit bewegt. Sei $\Omega(t)$ die von $\Gamma(t)$ eingeschlossene Region. $\phi(\mathbf{x}, t)$ sei die mit $\Omega(t)$ verknüpfte Level-Set Funktion, dann

- $\phi(\mathbf{x}, t) > 0$ in $\Omega(t)$
- $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ auf $\Gamma(t)$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir betrachten eine Oberfläche $\Gamma(t)$ in R^n , die sich mit der Zeit bewegt. Sei $\Omega(t)$ die von $\Gamma(t)$ eingeschlossene Region. $\phi(\mathbf{x}, t)$ sei die mit $\Omega(t)$ verknüpfte Level-Set Funktion, dann

- $\phi(\mathbf{x}, t) > 0$ in $\Omega(t)$
- $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ auf $\Gamma(t)$
- $\phi(\mathbf{x}, t) < 0$ außerhalb $\Omega(t)$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir betrachten eine Oberfläche $\Gamma(t)$ in R^n , die sich mit der Zeit bewegt. Sei $\Omega(t)$ die von $\Gamma(t)$ eingeschlossene Region. $\phi(\mathbf{x}, t)$ sei die mit $\Omega(t)$ verknüpfte Level-Set Funktion, dann

- $\phi(\mathbf{x}, t) > 0$ in $\Omega(t)$
- $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ auf $\Gamma(t)$
- $\phi(\mathbf{x}, t) < 0$ außerhalb $\Omega(t)$

Dann ist $\Gamma(t)$ der Zero-Level-Set von $\phi(\mathbf{x}, t)$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Aus

$$\phi(\Gamma(t), t) \equiv 0$$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Aus

$$\phi(\Gamma(t), t) \equiv 0$$

folgt nach Ableiten nach t die zeitabhängige partielle
Differentialgleichung:

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Aus

$$\phi(\Gamma(t), t) \equiv 0$$

folgt nach Ableiten nach t die zeitabhängige partielle
Differentialgleichung:

$$\phi_t + \frac{d\Gamma(t)}{dt} \cdot \nabla\phi = 0$$

Level-Set Formulierung

Surface Re-
construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige
Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set
Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische
Implementierung

Convection Model

Ende

Aus

$$\phi(\Gamma(t), t) \equiv 0$$

folgt nach Ableiten nach t die zeitabhängige partielle Differentialgleichung:

$$\phi_t + \frac{d\Gamma(t)}{dt} \cdot \nabla\phi = 0$$

Wir wollen also die geometrische Bewegung, die wir durch den Gradientenfluss $\frac{d\Gamma(t)}{dt}$ errechnet haben, nun von dem Zero-Level-Set auf alle Level-Sets erweitern.

Wdh. Normalenvektor/Krümmung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Im Bezug auf Level-Sets ist der Gradient (hier: im Dreidimensionalen) definiert als:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right)$$

Wdh. Normalenvektor/Krümmung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Im Bezug auf Level-Sets ist der Gradient (hier: im Dreidimensionalen) definiert als:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right)$$

Der Normalenvektor ist dann:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|}$$

Wdh. Normalenvektor/Krümmung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Im Bezug auf Level-Sets ist der Gradient (hier: im Dreidimensionalen) definiert als:

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right)$$

Der Normalenvektor ist dann:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla\phi(\mathbf{x})}{|\nabla\phi(\mathbf{x})|}$$

Weiterhin ist die Krümmung definiert als:

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial n_1}{\partial x_1} + \frac{\partial n_2}{\partial x_2} + \frac{\partial n_3}{\partial x_3}$$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir nehmen

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) [\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{p} d(\mathbf{x}) \kappa] \mathbf{n}$$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wir nehmen

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\int_{\Gamma} d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) [\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{p} d(\mathbf{x}) \kappa] \mathbf{n}$$

und setzen für die Krümmung und den Normalenvektor ihre Level-Set Representationen ein:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\int d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Setzen wir jetzt

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\int d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Setzen wir jetzt

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\left[\int d^p(\mathbf{x}) ds\right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

$$\text{in } \phi_t + \frac{d\Gamma(t)}{dt} \cdot \nabla\phi = 0$$

ein

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Setzen wir jetzt

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -[\int d^p(\mathbf{x}) ds]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) [\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

$$\text{in } \phi_t + \frac{d\Gamma(t)}{dt} \cdot \nabla\phi = 0$$

ein , so ergibt sich

$$\phi_t - [\int d^p(\mathbf{x}) ds]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) [\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \nabla\phi = 0$$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

$$\text{Aus } \phi_t - \left[\int d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) [\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}] \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \nabla \phi = 0$$

Level-Set Formulierung

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

$$\text{Aus } \phi_t - \left[\int d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \nabla \phi = 0$$

folgt unmittelbar

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \left[\int d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right]$$

Roundup

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Erinnerung: $p=1$ meist guter Gewichtungswert, setzen wir also $p=1$ in

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \left[\int d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right]$$

ein,

Roundup

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Erinnerung: $p=1$ meist guter Gewichtungswert, setzen wir also $p=1$ in

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \left[\int d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right]$$

ein, so bekommen wir

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] |\nabla \phi|$$

Roundup

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Erinnerung: $p=1$ meist guter Gewichtungswert, setzen wir also $p=1$ in

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \left[\int d^p(\mathbf{x}) ds \right]^{\frac{1}{p}-1} d^{p-1}(\mathbf{x}) \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right]$$

ein, so bekommen wir

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\nabla d(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + d(\mathbf{x}) \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right] |\nabla \phi|$$

Damit haben wir eine relativ einfache Formel für die Oberflächenrekonstruktion über das MSM gewonnen.

Wozu?

Um das Weighted Minimal Surface Model anzuwenden, ist es wünschenswert schon mit einer möglichst guten Oberflächenapproximation zu starten. Und zwar, da ein timestep des MSM $\Delta t = O(\Delta x^2)$ kostet

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wozu?

Um das Weighted Minimal Surface Model anzuwenden, ist es wünschenswert schon mit einer möglichst guten Oberflächenapproximation zu starten. Und zwar, da ein timestep des MSM $\Delta t = O(\Delta x^2)$ kostet

- Hierzu läßt sich hervorragend das einfache Convection Model verwenden.

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Wozu?

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Um das Weighted Minimal Surface Model anzuwenden, ist es wünschenswert schon mit einer möglichst guten Oberflächenapproximation zu starten. Und zwar, da ein timestep des MSM $\Delta t = O(\Delta x^2)$ kostet

- Hierzu läßt sich hervorragend das einfache Convection Model verwenden.
- Dabei wird einfach der maximale Abstand der Oberfläche zum nächsten Punkt des Datensatzes minimiert. Ohne Berücksichtigung der Geometrischen Eigenschaften wie Krümmung.

Wozu?

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implementierung

Convection Model

Ende

Um das Weighted Minimal Surface Model anzuwenden, ist es wünschenswert schon mit einer möglichst guten Oberflächenapproximation zu starten. Und zwar, da ein timestep des MSM $\Delta t = O(\Delta x^2)$ kostet

- Hierzu läßt sich hervorragend das einfache Convection Model verwenden.
- Dabei wird einfach der maximale Abstand der Oberfläche zum nächsten Punkt des Datensatzes minimiert. Ohne Berücksichtigung der Geometrischen Eigenschaften wie Krümmung.
- Es entsteht also keine glatte membranähnliche Oberfläche sondern ein Polyeder.

Idee

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ist ein Geschwindigkeitsfeld durch ein Potentialfeld F gegeben, so gilt $\mathbf{v} = -\nabla F$.

Idee

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ist ein Geschwindigkeitsfeld durch ein Potentialfeld F gegeben, so gilt $\mathbf{v} = -\nabla F$. Im Convection Model ist das Potentialfeld, wie eben besprochen, die Distanzfunktion $d(\mathbf{x})$ zum Datensatz S .

Idee

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ist ein Geschwindigkeitsfeld durch ein Potentialfeld F gegeben, so gilt $\mathbf{v} = -\nabla F$. Im Convection Model ist das Potentialfeld, wie eben besprochen, die Distanzfunktion $d(\mathbf{x})$ zum Datensatz S . So kommen wir für den Gradientenfluss über

Idee

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ist ein Geschwindigkeitsfeld durch ein Potentialfeld F gegeben, so gilt $\mathbf{v} = -\nabla F$. Im Convection Model ist das Potentialfeld, wie eben besprochen, die Distanzfunktion $d(\mathbf{x})$ zum Datensatz S . So kommen wir für den Gradientenfluss über:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \phi$$

Idee

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Ist ein Geschwindigkeitsfeld durch ein Potentialfeld F gegeben, so gilt $\mathbf{v} = -\nabla F$. Im Convection Model ist das Potentialfeld, wie eben besprochen, die Distanzfunktion $d(\mathbf{x})$ zum Datensatz S . So kommen wir für den Gradientenfluss über:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \phi$$

direkt zu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla d(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi$$

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Jeder Punkt unserer Oberfläche wird zum nächsten Punkt aus S angezogen

Verfahrensweise

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Jeder Punkt unserer Oberfläche wird zum nächsten Punkt aus S angezogen
- Es sei denn, der Punkt ist gleichweit von zwei oder mehr Punkten aus S entfernt (nennen wir dann EqualDistancePoint)

Verfahrensweise

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Jeder Punkt unserer Oberfläche wird zum nächsten Punkt aus S angezogen
- Es sei denn, der Punkt ist gleichweit von zwei oder mehr Punkten aus S entfernt (nennen wir dann EqualDistancePoint)
- Am Ende haben wir ein Polyeder.

Verfahrensweise

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

- Jeder Punkt unserer Oberfläche wird zum nächsten Punkt aus S angezogen
- Es sei denn, der Punkt ist gleichweit von zwei oder mehr Punkten aus S entfernt (nennen wir dann EqualDistancePoint)
- Am Ende haben wir ein Polyeder.
- Genauer gleich im Algo...

- Jeder Punkt unserer Oberfläche wird zum nächsten Punkt aus S angezogen
- Es sei denn, der Punkt ist gleichweit von zwei oder mehr Punkten aus S entfernt (nennen wir dann EqualDistancePoint)
- Am Ende haben wir ein Polyeder.
- Genauer gleich im Algo...

Das Convection Model braucht nur einen timestep Aufwand von $\Delta t = O(\Delta x)$

Vorraussetzungen

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Im Folgenden soll kurz eine numerische Implementierung des Convection Models veranschaulicht werden. Folgende Vorbereitungen werden getroffen

Vorraussetzungen

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Im Folgenden soll kurz eine numerische Implementierung des Convection Models veranschaulicht werden. Folgende Vorbereitungen werden getroffen

- Von einer Startoberfläche im Gitter werden alle äußeren Punkte als Exterior Points markiert.

Vorraussetzungen

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Im Folgenden soll kurz eine numerische Implementierung des Convection Models veranschaulicht werden. Folgende Vorbereitungen werden getroffen

- Von einer Startoberfläche im Gitter werden alle äußeren Punkte als Exterior Points markiert.
- Alle Punkte, die nicht zur Exterior Region gehören, werden als Interior Points bezeichnet.

Vorraussetzungen

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Im Folgenden soll kurz eine numerische Implementierung des Convection Models veranschaulicht werden. Folgende Vorbereitungen werden getroffen

- Von einer Startoberfläche im Gitter werden alle äußeren Punkte als Exterior Points markiert.
- Alle Punkte, die nicht zur Exterior Region gehören, werden als Interior Points bezeichnet.
- Alle Interior Points die, mindestens einen Exterior Point zum Nachbarn haben, werden zu Temporary Boundary Points.

Verfahren

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Dann wie folgt, um die Temporary Boundary Richtung
Datensatz zu bewegen:

Dann wie folgt, um die Temporary Boundary Richtung Datensatz zu bewegen:

- TBP geordnet nach Distanzwerten in HeapSort binaryTree Struktur

Dann wie folgt, um die Temporary Boundary Richtung Datensatz zu bewegen:

- TBP geordnet nach Distanzwerten in HeapSort binaryTree Struktur
- TBP mit größter Distanz nehmen, gucken ob IP als Nachbar der \geq Distanzwert hat

Dann wie folgt, um die Temporary Boundary Richtung Datensatz zu bewegen:

- TBP geordnet nach Distanzwerten in HeapSort binaryTree Struktur
- TBP mit größter Distanz nehmen, gucken ob IP als Nachbar der \geq Distanzwert hat
- Wenn nein, TBP zu EP machen, aus dem Heap nehmen, alle IP Nachbarn zu TBP (also rein in den Heap)

Dann wie folgt, um die Temporary Boundary Richtung Datensatz zu bewegen:

- TBP geordnet nach Distanzwerten in HeapSort binaryTree Struktur
- TBP mit größter Distanz nehmen, gucken ob IP als Nachbar der \geq Distanzwert hat
- Wenn nein, TBP zu EP machen, aus dem Heap nehmen, alle IP Nachbarn zu TBP (also rein in den Heap)
- Wenn ja, TBP in FinalBoundaryPoint umwandeln und aus Heap entfernen

Dann wie folgt, um die Temporary Boundary Richtung Datensatz zu bewegen:

- TBP geordnet nach Distanzwerten in HeapSort binaryTree Struktur
- TBP mit größter Distanz nehmen, gucken ob IP als Nachbar der \geq Distanzwert hat
- Wenn nein, TBP zu EP machen, aus dem Heap nehmen, alle IP Nachbarn zu TBP (also rein in den Heap)
- Wenn ja, TBP in FinalBoundaryPoint umwandeln und aus Heap entfernen

So lange bist eine bestimmte Distanz erreicht ist (von uns festgelegt), dann alle restlichen TBP in FBP umwandeln, done.

Surface Re- construction

Nail
El-Sourani

Einführung

Outline

Bisherige Methoden

Voronoi

Delaunay

Folgerungen

Level-Set Methoden

Minimal Surface
Model

Convection Model

Numerische Implemen- tierung

Convection Model

Ende

Done.