

Implicit Surfaces

Contents

1	Implicit Functions	2
1.1	Points	2
1.2	Curves	2
1.3	Surfaces	3
1.4	Geometry Toolbox	4
1.5	Calculus Toolbox	6
2	Signed Distance Functions	9
2.1	Introduction	9
2.2	Distance Functions	9
2.3	Signed Distance Functions	9
2.4	Examples	10
2.5	Geometry and Calculus Toolboxes	11

1 Implicit Functions

1.1 Points

- Zuerst wird der Fall eines eindimensionalen Gebietes $\Omega \subsetneq \mathbb{R}$ betrachtet und wir wählen hier $\Omega^- := (-1, 1)$ als den inneren und $\Omega^+ := (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ als den äußeren Teil des Gebiets Ω , der Rand besteht nur aus den beiden Punkten -1 und 1, d.h. $\partial\Omega := \{-1, 1\}$ und wird Interface genannt.
- Hier im eindimensionalen Fall sind Inneres und Äußeres 1-dim und das Grenzgebiet nulldimensional. Im allgemeinen gilt im \mathbb{R}^n , dass die Teilgebiete n-dimensional sind und das Grenzgebiet (n-1)-dimensional ist. Man spricht dann davon, dass das Grenzgebiet, die Codimension 1 hat.
- Nun unterscheidet man zwischen einer expliziten und einer impliziten Darstellung dieses Grenzgebietes.
In der expliziten Darstellung werden alle zum Grenzgebiet gehörigen Punkte aufgezählt, wie oben geschehen mit $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. In der impliziten Darstellung wird jedoch dieses Grenzgebiet als Urbildmenge eines Funktionswertes einer Funktion ϕ definiert.
In dem oben genannten eindimensionalen Fall würden zum Beispiel die Nullstellen der Funktion $\phi(x) = x^2 - 1$ dasselbe Grenzgebiet beschreiben. Hier gilt im Allgemeinen, dass die implizite Funktion $\phi(\vec{x})$ auf \mathbb{R}^n definiert ist und die Urbildmenge nur (n-1)-dimensional ist.
- Oben haben wir die Nullstellen einer Funktion betrachtet, aber es ist generell egal, welche Urbilder man betrachtet. Denn man kann durch Addition oder Subtraktion eines Skalars eine neue Funktion definieren und deren Nullstellen betrachten. Diese beiden Funktionen unterscheiden sich dann nur um einen konstanten Term und deswegen stört dieser auch bei späterer Differenziation nicht.
Deswegen wird auch im weiteren immer davon ausgegangen, dass die Nullstellen von ϕ das Grenzgebiet repräsentieren.

1.2 Curves

- Nun betrachten wir im 2-dimensionalen Fall Kurven die den \mathbb{R}^2 unterteilen, dabei sind nur geschlossene Kurven von Interesse, da nur sie ein eindeutiges Inneres und Äußeres garantieren.
- Als Beispiel betrachten wir $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$, hier definieren die Nullstellen gerade den Einheitskreis als Grenzgebiet $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$. Dementsprechend sind Inneres und Äußeres definiert als $\Omega^- = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| < 1\}$ bzw. $\Omega^+ = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| > 1\}$.
- Obige Darstellung für $\partial\Omega$ ist bereits die explizite, was in diesem Fall auch nicht schwer zu sehen ist. Nur generell führt die explizite Darstellung zu einigen Problemen.
Denn man bräuchte dann eine Parametrisierung der Kurve $\vec{x}(s)$, wobei $s \in [s_0, s_f]$. Und diese wird im Allgemeinen nicht trivial sein, also muss man eine Diskretisierung für das Intervall $[s_0, s_f]$ wählen, welche nicht zwingend regulär sein wird. Es werden nun für jeden Knotenpunkt s_i die

Koordinaten von $\vec{x}(s_i)$ gespeichert und mit höherer Anzahl an Knotenpunkten steigt die Qualität der Lösung, d.h. starke Abhängigkeit von Diskretisierung!

- Bei der Diskretisierung einer impliziten Darstellung wählt man ein beschränktes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ und diskretisiert dieses mit Punkten (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, um hiermit die implizite Funktion ϕ zu approximieren. An dieser Stelle erkennt man einen kleinen Nachteil der impliziten Darstellung, da hierbei ein 2-dimensionales Gebiet diskretisiert wurde und nicht, wie im expliziten Fall, ein eindimensionales Intervall. Dies relativiert sich jedoch, da man sich nur für die Punkte nah des Grenzgebietes interessiert, d.h. es sind nur die \vec{x} interessant, die nah bei den Nullstellen von ϕ liegen. Alle weiter entfernten Punkte müssen nicht berechnet werden; es ist nur eine lokale Approximation wichtig.
- Beide Diskretisierungen (explizite und implizite) machen keine exakten Aussagen darüber, wo das Grenzgebiet liegt, sie liefern nur Informationen an den gewählten Stützstellen.
Im expliziten Fall hat man durch die Diskretisierung endlich viele Punkte auf der Kurve gegeben und kann durch stückweise Interpolation, i.d.R. mit Splines, die restliche Kurve approximieren.
Bei der impliziten Darstellung hat man nun ϕ an endlich viele Stützstellen gegeben und muss hier wieder interpolieren. Hier kennt man nun keine Punkte auf dem Grenzgebiet, es sei denn man hat Stützstellen \vec{x} mit $\phi(\vec{x}) = 0$ gewählt.
- Üblicherweise wird man hierfür ein kartesisches reguläres Gitter wählen, d.h. $\{(x_i, y_j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ mit $\Delta x = x_{i+1} - x_i \forall 1 \leq i \leq m - 1$ und $\Delta y = y_{j+1} - y_j \forall 1 \leq j \leq n - 1$. Zur einfacheren Fehlerabschätzung wählt man nun auch noch $\Delta x = \Delta y$. Dementsprechend hat unser obiges D folgende Gestalt, $D = [x_1, x_m] \times [y_1, y_n]$; jedoch ist ϕ nur in der Nähe des Grenzgebietes von Interesse und man muss für eine lokale Näherung nur verhältnismäßig wenige Gitterpunkte auswerten.
- Im eindimensionalen Fall besteht die explizite Darstellung der Grenze nur aus einzelnen Punkten und deswegen ist keine Diskretisierung notwendig. Die implizite Funktion ϕ ist dann auf einem Intervall $D = [x_1, x_m]$ zu diskretisieren, außer falls ϕ bereits eine analytische Funktion ist, d.h. sie lässt sich lokal als konvergente Potenzreihe darstellen. Auch hier wird man üblicherweise wieder eine äquidistante Unterteilung wählen.

1.3 Surfaces

- Im dreidimensionalen Raum betrachten wir die Einheitskugel als Standardbeispiel, d.h. unsere Grenze ist die zweidimensionale Sphäre der Einheitskugel. Diese wird durch die Nullstellen der impliziten Funktion $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ repräsentiert. Als Inneres und Äußeres ergeben sich dann wieder $\Omega^- = \{\vec{x} | |\vec{x}| < 1\}$ bzw. $\Omega^+ = \{\vec{x} | |\vec{x}| > 1\}$, die explizite Darstellung der Sphäre ist durch $\partial\Omega = \{\vec{x} | |\vec{x}| = 1\}$ gegeben.
- Auch hier wird wieder für nicht analytische Funktionen eine entsprechende Diskretisierung benötigt. Diese ist aber im dreidimensionalen Raum schw-

erer zu verwirklichen, da man nicht mehr, wie im zweidimensionalen Fall, eine strikte Ordnung der Elemente gegeben hat, da Elemente auf einer Ebene nicht so einfach zu ordnen sind wie Elemente auf einer Kurve. Falls man jedoch die Lage und Zusammenhang der Oberfläche kennt, kann man diese mit Dreiecken überdecken und approximieren. Wenn der Zusammenhang der Oberfläche unbekannt ist und diese gegebenenfalls sogar Löcher hat, ist dies im Allgemeinen nicht gut lösbar.

- Da sich der Zusammenhang im Allgemeinen dynamisch verändert, kann man keine feste explizite Angabe über die Grenzgebiete machen. Im zweidimensionalen Fall kann man diese Probleme noch relativ gut handhaben. Falls Gebiete verschmelzen, hat man zwei verschiedene Parametrisierungen gegeben und kombiniert diese zu einer neuen. Falls sich ein Gebiet aufspaltet, teilt man die gegebene Parametrisierung in zwei neue verschiedene auf.
- An dieser Stelle wird nun ein klarer Vorteil der impliziten Darstellung deutlich, da diese unabhängig von dem Zusammenhang von Ω ist. Man kann auch hier wieder ein dreidimensionales reguläres Gitter wählen und wie im zweidimensionalen Fall vorgehen; dieses Verfahren lässt sich auch noch beliebig höherdimensional weiterführen.

1.4 Geometry Toolbox

- Da wir die Nullstellen von ϕ als Repräsentation der Grenze gewählt haben, können wir nun in der impliziten Darstellung anhand des Vorzeichens von $\phi(\vec{x})$ entscheiden, ob \vec{x} innerhalb ($\phi(\vec{x}) < 0$) oder außerhalb ($\phi(\vec{x}) > 0$) liegt. In einer expliziten Darstellung wäre dies sehr viel komplizierter. Oftmals entscheidet man dies dann folgendermaßen; man verbindet den zu überprüfenden Punkt \vec{x} mit einem Punkte \vec{x}_0 , von dem man weiß, ob er innerhalb oder außerhalb liegt, und nun entscheidet man je nachdem wie oft diese Verbindungsstrecke die Grenze schneidet, wo \vec{x} liegt. Falls die Grenze nur durch endlich viele Punkte gegeben ist, muss für die Zwischenstelle wieder interpoliert werden.
- Bei numerischer Interpolation treten aber immer gewisse Fehler auf, die in diesem Fall dafür sorgen können, dass innere Punkte als außerhalb liegend berechnet werden oder umgekehrt. Solange diese Fehler gering bleiben, sind diese akzeptabel und falls man zusätzlich ein "gut-stelltes Problem" vorliegen hat, ist diese lösbar. Vorsicht ist nur geboten, falls ein sogenanntes "schlecht-gestelltes Problem" vorliegt, d.h. es gibt keine (eindeutige) Lösung, die stetig von den Daten abhängt. Für das gut gestellte Problem würde eine Verfeinerung des Gitters dementsprechend eine Verbesserung der Lösung bedeuten. Für gute Approximationen sollte die implizite Funktion ϕ möglichst glatt sein, später werden wir ϕ als eine "signed distance function" wählen, aber dazu im nächsten Kapitel mehr.
- Mit impliziten Funktionen lassen sich sowohl einfache boolesche Mengenoperationen als auch komplexere "constructive solid geometry"-Operationen gut berechnen; diese werden zum Beispiel bei "computer-aided design"

benötigt.

Seien ϕ_1 und ϕ_2 zwei gegebene implizite Funktionen, dann stellt $\phi(\vec{x}) = \min(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$ die Vereinigung der durch ϕ_1 und ϕ_2 dargestellten inneren Gebiete dar. $\phi(\vec{x}) = \max(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$ repräsentiert dann den Schnitt der inneren Gebiete, $\phi(\vec{x}) = -\phi_1(\vec{x})$ ist das Komplement und $\phi(\vec{x}) = \min(\phi_1(\vec{x}), -\phi_2(\vec{x}))$ repräsentiert das innere Gebiet von ϕ_1 ohne das Innere von ϕ_2 .

- Der Gradient $\nabla\phi$ steht senkrecht auf der Höhenlinie von ϕ und hat für einen Punkt \vec{x}_0 auf der Grenze dieselbe Richtung wie der zugehörige (äußere) Normalenvektor, d.h. für Punkte auf der Grenze ist $\vec{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ der (äußere) Einheitsnormalenvektor. Da wir den Einheitsnormalenvektor nicht nur für Randpunkte definieren wollen, werden wir eine andere Darstellung als die obige benötigen.
- Für den eindimensionalen Fall mit $\phi(x) = x^2 - 1$ ergibt sich mit obiger Darstellung $\vec{N} = \frac{x}{|x|}$. Also gilt für alle Punkte $0 < x \leq 1$: $\vec{N} = 1$ und für alle $-1 \leq x < 0$: $\vec{N} = -1$.
Für $x = 0$ ist der Normalenvektor nicht definiert. Dieses Problem kann man zum Beispiel damit beheben, dass man $\vec{N} = 1$ oder $\vec{N} = -1$ setzt. Auch im zwei- und dreidimensionalen Fall treten diese Probleme bei null auf. Auch hier kann man eine beliebige Richtung als Normalenrichtung wählen. Der Versuch ein kleines $\epsilon > 0$ im Nenner zu addieren, falls dieser null ist, liefert leider eine Normale mit $|\vec{N}| \neq 1$ und sogar $\vec{N} = \vec{0}$.
- Auf unserem regulären Gitter können wir die Ableitungen durch verschiedene finite Differenzenverfahren approximieren, dem Vorwärt-Differenzen-Verfahren $D^+\phi = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$, dem Rückwärts-Differenzen-Verfahren $D^-\phi = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}$ oder dem Zentralen-Differenzen-Verfahren $D^0\phi = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}$, wobei die ersten beiden Verfahren erster Ordnung sind, und der Zentrale-Differenzen-Quotient zweiter Ordnung ist.
- Falls nun die Differenzen-Quotienten in jeder Richtung null sind, dann verschwindet der Nenner in der ersten Darstellung des Einheitsnormalenvektors und wir können wieder eine beliebige Richtung für diesen wählen. Dies verschlechtert die berechnete Lösung nicht, da der Fehler hierbei nur in der Größenordnung des Rundungsfehlers ist und somit kleiner als der Fehler, der durch das Finite Differenzen Verfahren entsteht, ist.
- Betrachten wir hierfür erneut unsere eindimensionale implizite Funktion $\phi(x) = x^2 - 1$ und seien Gitterpunkte $x_{i-1} = -\Delta x$, $x_i = 0$ und $x_{i+1} = \Delta x$ gegeben. Die exakten Werte sind dann $\phi_i = -1$ und $\phi_{i-1} = \Delta x^2 - 1 = \phi_{i+1}$. Der Vorwärtsdifferenzenquotient ergibt $\vec{N}_i = 1$, der Rückwärtsdifferenzenquotient $\vec{N}_i = -1$ und der Zentrale-Differenzenquotient ist nicht definiert bei $x_i = 0$. Wenn man nun jedoch zu ϕ_{i+1} oder ϕ_{i-1} ein kleines $\epsilon > 0$ hinzuaddiert, so ist $D^0\phi \neq 0$ und man erhält $\vec{N}_i = 1$ bzw. $\vec{N}_i = -1$. Man kann also bei jeder Näherung, die stabil unter kleinen Veränderungen der Daten ist, eine beliebige Richtung für den Normalenvektor wählen, falls der Nenner verschwindet.

Ebenso gilt $\vec{N} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ im zwei- und dreidimensionalen Fall, für alle $\vec{x} \neq 0$. Und wir wählen wieder eine beliebige Normale für $\vec{x} = 0$.

- Falls ϕ genügend glatt ist, kann man die Normalen auf der Grenze mittels der auf den Knotenpunkten berechneten Normalen approximieren. In der Regel genügt dann bei Benutzung eines der oberen finiten Differenzenverfahren, wenn man von den Knotenpunkten ausgehend interpoliert. Dafür ist nun wieder wichtig, dass ϕ keine unnötigen Oszillationen oder steile oder flache Gradienten hat.
- Die mittlere Krümmung der Grenze ist als Divergenz des Normalenvektors $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$ definiert, d.h.

$$\kappa = \nabla \cdot \vec{N} = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} + \frac{\partial n_3}{\partial z}.$$

Daraus ergibt sich, dass in konvexen Regionen $\kappa > 0$, in konkaven Regionen $\kappa < 0$ und in ebenen Flächen $\kappa = 0$ gilt. Nun könnte man die partiellen Ableitungen hier durchaus mit finiten Differenzen Methoden berechnen, es erweist sich aber als genauer und günstiger auf ϕ zurückzugreifen. Wenn man ϕ einsetzt, erhält man $\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)$, und ausgeschrieben dann

$$\kappa = (\phi_x^2 \phi_{yy} - 2\phi_x \phi_y \phi_{xy} + \phi_y^2 \phi_{xx} + \phi_x^2 \phi_{zz} - 2\phi_x \phi_z \phi_{xz} + \phi_z^2 \phi_{xx} + \phi_y^2 \phi_{zz} - 2\phi_y \phi_z \phi_{yz} + \phi_z^2 \phi_{yy}) / |\nabla \phi|^3.$$

Für Ableitungen zweiter Ordnung in x-Richtung eignet sich das folgende Differenzen-Verfahren: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$, kurz $D_x^+ D_x^- \phi$ oder äquivalent dazu $D_x^- D_x^+ \phi$. Für die zweiten partiellen Ableitungen in x- und y-Richtung ist $D_x^0 D_y^0 \phi$ oder $D_y^0 D_x^0 \phi$ eine gute Wahl. Dies sind alles Verfahren zweiter Ordnung.

- In dem eindimensionalen Beispiel ($\phi(x) = x^2 - 1$) ist $\kappa = 0$, außer im Ursprung, da dort der Nenner erneut null wäre. Dies ist aber hier eine hebbare Singularität und man kann $\kappa = 0$ überall definieren. Im zwei- und dreidimensionalen Beispiel ergeben sich dann $\kappa = \frac{1}{|\vec{x}|}$ bzw. $\kappa = \frac{2}{|\vec{x}|}$. Jedoch liegen hier nun im Ursprung keine hebbaren Singularitäten mehr vor. Aber es gilt dann $\kappa = 1$ bzw. $\kappa = 2$ auf der eindimensionalen bzw. zweidimensionalen Grenze.

Die Tatsache, dass $\kappa \rightarrow \infty$, sobald wir uns dem Ursprung nähern, ist nicht weiter von Bedeutung, da wir auf unserem Gitter nicht näher als Δx an diesen heran kommen können. Dementsprechend macht es auch wenig Sinn zu versuchen Kreise (oder Sphären) mit kleinerem Radius als Δx zu modellieren. Deswegen werden wir die Krümmung durch $-\frac{1}{\Delta x} \leq \kappa \leq \frac{1}{\Delta x}$ beschränken. Falls ein Wert außerhalb dieses Bereiches berechnet wird, wird dieser einfach auf $-\frac{1}{\Delta x}$ bzw. $\frac{1}{\Delta x}$ gesetzt.

1.5 Calculus Toolbox

- Die charakteristischen Funktionen vom Inneren, Ω^- , und vom Äußeren, Ω^+ , sind durch

$$\chi^-(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \phi(\vec{x}) \leq 0, \\ 0 & \text{falls } \phi(\vec{x}) > 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \chi^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \phi(\vec{x}) > 0 \\ 0 & \text{falls } \phi(\vec{x}) \leq 0 \end{cases} \quad \text{gegeben.}$$
 Wobei wir hier nun den Rand zum Inneren hinzugenommen haben, damit wir nur innere und äußere Gebiete haben und keine Sonderbetrachtung des Randes notwendig ist.

- Da obige charakteristische Funktionen auf mehrdimensionalen Vektoren arbeiten, wollen wir uns es etwas einfacher machen und das ganze mittels der Heaviside-Funktion im Eindimensionalen betrachten, sprich

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \phi \leq 0, \\ 1 & \text{falls } \phi > 0 \end{cases} \quad \text{definieren.}$$

Daraus ergibt sich dann, dass $\chi^+(\vec{x}) = H(\phi(\vec{x}))$ und $\chi^-(\vec{x}) = 1 - H(\phi(\vec{x}))$ für alle \vec{x} sind; die Tatsache, dass ϕ weiterhin im mehrdimensionalen definiert ist, stört bei der Benutzung von $H(\phi)$ nicht weiter.

- Das Integral einer Funktion f über Ω^- ist dann $\int_{\Omega} f(\vec{x})\chi^-(\vec{x})d\vec{x}$ bzw. umgeschrieben mittels Heaviside-Funktion $\int_{\Omega} f(\vec{x})(1 - H(\phi(\vec{x})))d\vec{x}$. Analog gilt für das Integral über Ω^+ für eine Funktion f , $\int_{\Omega} f(\vec{x})H(\phi(\vec{x}))d\vec{x}$.

- Die Ableitung der Heaviside Funktion in Normalenrichtung \vec{N} ist als die Dirac-Delta-Funktion definiert, d.h. $\hat{\delta}(\vec{x}) = \nabla H(\phi(\vec{x})) \bullet \vec{N}$, welche überall, außer auf der Grenze $\partial\Omega$, wo $\phi = 0$ gilt, null ist.

Mit Hilfe der Kettenregel, $\vec{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ und $\nabla\phi(\vec{x}) \bullet \nabla\phi(\vec{x}) = |\nabla\phi(\vec{x})|^2$ erhält man $\hat{\delta}(\vec{x}) = H'(\phi(\vec{x}))\nabla\phi(\vec{x}) \bullet \frac{\nabla\phi(\vec{x})}{|\nabla\phi(\vec{x})|} = H'(\phi(\vec{x}))|\nabla\phi(\vec{x})|$.

Die eindimensionale Delta-Funktion ist als Ableitung der Heaviside-Funktion definiert, d.h. $\delta(\phi) = H'(\phi)$. Da diese ebenfalls überall verschwindet, außer bei $\phi = 0$, können wir obige Gleichung für $\hat{\delta}$ umschreiben zu $\hat{\delta}(\vec{x}) = \delta(\phi(\vec{x}))|\nabla\phi(\vec{x})|$.

- Das Integral einer Funktion auf dem Grenzgebiet $\partial\Omega$ ist definiert als $\int_{\Omega} f(\vec{x})\hat{\delta}(\vec{x})d\vec{x}$, welches wir mittels der eindimensionalen Delta-Funktion zu $\int_{\Omega} f(\vec{x})\delta(\phi(\vec{x}))|\nabla\phi(\vec{x})|d\vec{x}$ umschreiben können. Normalerweise würde man Volumen- bzw. Randintegrale berechnen in dem man Ω^- bzw. $\partial\Omega$ aufteilt. Aber anstatt komplizierte zweidimensionale Flächen im dreidimensionalen Raum zu bearbeiten, können wir nun auf die oben hergeleiteten Integralformel über ganz Ω zurückgreifen.

- Für die Berechnung des Randintegrals ist es nun nötig die eindimensionale Delta-Funktion zu berechnen. Nun gilt jedoch $\delta(\phi) = 0$ überall, außer auf dem (niedrig-dimensionalem) Grenzgebiet, welches Volumen null hat. Deswegen ist dies nicht mit Standardmethoden zu approximieren. Darum betrachten wir nun eine (mit Fehlerordnung 1) verwackelte Heaviside-Funktion:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi < -\epsilon, \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\epsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) & \text{für } -\epsilon \leq \phi \leq \epsilon, \\ 1 & \text{für } \epsilon < \phi \end{cases}$$

Hierbei ist ϵ ein veränderbarer Parameter, der angibt um wieviel man verwackelt. Als eine gute Größe stellt sich $\epsilon = 1.5\Delta x$ heraus, um die Breite der Grenze auf die Größe von drei Gitterzellen zu setzen; falls ϕ normiert ist zu einer "signed distance function" mit $|\nabla\phi| = 1$ (s. 2.Kapitel).

- Da die eindimensionale Delta-Funktion als Ableitung der Heaviside-Funktion definiert war, gilt nun für die verwackelte Delta-Funktion:

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi < -\epsilon, \\ \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) & \text{für } -\epsilon \leq \phi \leq \epsilon, \\ 0 & \text{für } \epsilon < \phi \end{cases}$$

Mit dieser Delta-Funktion können wir nun obiges Randintegral mit Standardtechniken wie zum Beispiel der Mittelpunktsregel lösen. Auch die beiden anderen Volumenintegrale können mit der verwackelten Heaviside-Funktion auf Standardwegen gelöst werden.

- Dies führt nun insgesamt zu einem Verfahren erster Ordnung, denn wenn man zum Beispiel das Volumen von Ω^- bestimmen will, müsste man $\int_{\Omega} (1 - H(\phi(\vec{x}))) dV$ lösen. Hierbei ist nun, unabhängig vom gewählten Verfahren, ein Fehler der Ordnung $O(\Delta x)$ nicht vermeidbar. Falls eine höhere Fehlerordnung notwendig ist, kann man noch auf kompliziertere Verfahren zurückgreifen (z.B. "marching cubes").

2 Signed Distance Functions

2.1 Introduction

- Nun werden wir hier endlich die Anforderungen an unsere implizite Funktion ϕ spezifizieren. Wir wählen ϕ als eine "signed distance function", d.h. ϕ ist eine Distanzfunktion, sie ist im Inneren negativ, im Äußeren positiv und auf dem Rand null; zusätzlich gilt $|\nabla\phi(\vec{x})| = 1$.

2.2 Distance Functions

- Eine Distanzfunktion $d(\vec{x})$ misst den (kürzesten) Abstand eines Punktes \vec{x} zu einem gegebenen Rand $\partial\Omega$, d.h. $d(\vec{x}) = \min_{\vec{x}_I \in \partial\Omega} (|\vec{x} - \vec{x}_I|)$.
Falls nun \vec{x}_C der nächstgelegene Randpunkt zu \vec{x} ist, dann ist dies auch der nächste Randpunkt für jeden Punkt \vec{y} auf der Verbindungsstrecke. Also würde jede Abweichung von dieser Strecke den Abstand erhöhen und so ist diese Strecke die Strecke mit dem größten Gefälle der Funktion d . $-\nabla d$ liefert nun für jeden Punkt auf dieser Verbindungsstrecke einen Vektor der von \vec{x} zu \vec{x}_C zeigt. Da d den euklidischen Abstand misst, gilt auch $|\nabla d| = 1$, denn falls man doppelt so nah am Rand ist, liefert d nur noch einen halb so großen Wert.
- Jedoch ist letzte Gleichung ($|\nabla d| = 1$) nur richtig, falls es einen eindeutig bestimmten nächsten Randpunkt für \vec{x} gibt. Da solche Punkte durchaus auftreten können gilt obige Gleichung nicht im Allgemeinen, liefert aber in der Regel eine genügend gute Approximation des Gradienten. Ein angenehmer Vorteil der Level-Set-Methoden ist die Einfachheit, mit welcher solche entarteten Punkte numerisch bearbeitet werden.

2.3 Signed Distance Functions

- Eine "signed distance function" (kurz SDF) ist nun eine Funktion mit $|\phi(\vec{x})| = d(\vec{x}) \forall \vec{x}$. Ebenso muss sie erfüllen, dass sie identisch null ist, für alle Randpunkte $\vec{x} \in \partial\Omega$, negativ für alle inneren Punkte, d.h. $\phi(\vec{x}) = -d(\vec{x}) \forall \vec{x} \in \Omega^-$ und positive für alle äußeren Punkte, d.h. $\phi(\vec{x}) = d(\vec{x}) \forall \vec{x} \in \Omega^+$.
- Eine SDF hat nun alle von uns im ersten Kapitel an die impliziten Funktionen geforderten Eigenschaften und sogar noch ein paar mehr. Zum Beispiel gilt wegen $|\nabla d| = 1$ nun auch $|\nabla\phi| = 1$, solange es einen eindeutigen nächsten Randpunkt gibt. Distanzfunktionen d haben einen Knick auf der Grenze, wo $d = 0$ ein lokales Minimum ist. Dies erschwert es auf oder in der Nähe der Grenze die Ableitungen von d zu approximieren. SDF jedoch sind monoton auf dem Grenzgebiet und können deswegen dort sehr viel besser abgeleitet werden.
- Nun können wir zu einem gegebenen Punkt \vec{x} mit Zuhilfenahme der Tatsache das $\phi(\vec{x})$ eine SDF ist, folgende Gleichung benutzen, um den nächsten Randpunkt \vec{x}_c zu ermitteln, $\vec{x}_c = \vec{x} - \phi(\vec{x})\vec{N}$, wobei \vec{N} wieder der lokale Einheitsnormalenvektor zu \vec{x} ist.
Dies gilt natürlich auch nur für den Fall eines eindeutig bestimmten nächsten

Randpunktes, liefert also nur eine Approximation. Gleichungen dieser Art sind aber dennoch sehr nützlich für uns, da sie als Approximation in genügend vielen "Regelfällen" richtig sind und nur in wenigen Fällen nicht gelten, welche hoffentlich nicht für einen globalen Zusammenbruch der numerischen Methode sorgen. Falls dem aber dennoch so sein sollte, kann eine Sonderfallbetrachtung helfen, sowie zum Beispiel in unserem Fall, als der Nenner der Gleichung $\vec{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ verschwand und wir eine beliebige Normalenrichtung wählten.

2.4 Examples

- Im ersten Kapitel wählten wir $\hat{\phi}(x) = x^2 - 1$ als Repräsentation für die Randpunkte $\partial\Omega = \{-1, 1\}$, als SDF wählen wir nun $\phi(x) = |x| - 1$. Diese Funktion hat dieselben Nullstellen und stellt also dasselbe innere und äußere Gebiet dar wie $\hat{\phi}$. Für alle $x \neq 0$ (da die Ableitung in 0 nicht definiert ist) gilt nun wieder $|\nabla\phi| = 1$. Dieser Knick von ϕ ist aber dennoch kein größeres Problem. Denn in der Berechnung (z.B. der Normalen in 0) wird dennoch ein fester Wert ausgerechnet, da wir nur unsere Gitterpunkte gegeben haben und deswegen diesen Knick nicht berechnen, sondern ihn "abrunden". Da die Ableitung im Intervall $[-1, 1]$ liegen wird, ist für solche Knicke nichts weiter zu beachten, und das Schlimmste was passieren kann ist, dass der Gradient null wird, aber den Fall hatten wir im ersten Kapitel schon behandelt.
- Im zweidimensionalen ersetzen wir $\hat{\phi}(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$ durch die SDF $\phi(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$, welche auch wieder den Rand $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$ repräsentiert. Hier gilt nun ebenfalls für alle $\vec{x} \neq \vec{0}$ $|\nabla\phi| = 1$ und es liegt bei $\vec{x} = \vec{0}$ ein (mehrdimensionaler) Knick vor. Auch hier wird dieser Knick durch unser Gitter "abgerundet" und stellt kein Problem dar, außer dass nun lokal $|\nabla\phi| \neq 1$ gilt. Dort ist ϕ also keine SDF mehr und man muss aufpassen, wo man $|\nabla\phi| = 1$ verwendet hat. In der Regel führt dies aber nicht zu großen Fehler und zusätzlich kommen solche Knicke meistens weit entfernt von den Nullstellen, also den für unsere Berechnungen der Grenzgebiete wichtige Regionen, vor.
- Im dreidimensionalen Fall benutzen wir nun statt $\hat{\phi}(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ die SDF $\phi(\vec{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1$, um die Einheitssphäre, $\partial\Omega = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| = 1\}$, darzustellen. Der Knick bei $\vec{x} = \vec{0}$ wird auch hier wieder "verwischt".
- In diesen drei Beispielen lag der Knick immer nur in einem einzigen Punkt vor, doch dies muss nicht immer so sein. Betrachten wir das eindimensionale Beispiel $\phi(\vec{x}) = |x| - 1$, welches im zweidimensionalen die beiden Geraden $x = -1$ und $x = 1$ als Grenze hat. Hier hat nun jeder Punkt auf der Geraden $x = 0$ einen Knick in x-Richtung, d.h. es liegt hier eine ganze Gerade mit Knicken vor. Analog liegt im dreidimensionalen Fall eine ganze Ebene mit Knicken vor. Aber diese werden auf unserem Gitter alle "abgerundet", so dass wir keine Definitionslücken für die Ableitung vorliegen haben und das dort lokal $|\nabla\phi| \neq 1$ gilt, schadet nicht weiter.

2.5 Geometry and Calculus Toolboxes

- Ebenso wie bei den allgemeinen impliziten Funktionen können wir hier für die SDF die booleschen Operationen definieren, d.h. für zwei SDF ϕ_1 und ϕ_2 stellt $\phi(\vec{x}) = \min(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$ die Vereinigung und $\phi(\vec{x}) = \max(\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x}))$ den Schnitt der inneren Gebiete dar. $\phi(\vec{x}) = -\phi_1(\vec{x})$ stellt das Komplement des inneren Gebietes Ω_1^- dar und $\phi(\vec{x}) = \max(\phi_1(\vec{x}), -\phi_2(\vec{x}))$ beschreibt das Gebiet, welches übrig bleibt, wenn man Ω_2^- aus Ω_1^- herausnimmt.
- Wie wir im ersten Kapitel gefordert hatten, sollen unsere impliziten Funktionen so glatt wie möglich sein. Dies wird durch die SDF gut erreicht, insbesondere wenn der Knick "geglättet" wurde. Denn da $|\nabla\phi| = 1$ überall, außer in der Nähe des Knickes, gilt, lassen sich viele Formeln des letzten Kapitels vereinfachen.
Der lokale Einheitsnormalenvektor \vec{N} erfüllt dann $\vec{N} = \nabla\phi$ und die Krümmung κ lässt sich mithilfe des Laplace-Operators lösen, $\kappa = \Delta\phi$, was nun sehr viel besser zu handhaben ist als die "alte" Darstellung.
- Der große Gewinn, den wir durch die SDF erhalten ist leicht zu sehen, jedoch weder Normalenvektor noch Krümmung werden exakt bestimmt. Denn man hat generell $|\nabla\phi| \neq 1$, zum Einen in der Nähe des Knickes und zum Anderen aufgrund der numerischen Berechnung des Gradienten. Vereinfachte Darstellungen ergeben sich auch noch für die mehrdimensionale Delta-Funktion, $\hat{\delta}(\vec{x}) = \delta(\phi(\vec{x}))$, wobei $\delta(\phi)$ wieder die eindimensionale Delta-Funktion. Und auch Randintegrale sind somit einfacher zu lösen, $\int_{\Omega} f(\vec{x})\delta(\phi(\vec{x}))d\vec{x}$.