

# Particle Level Set Methods

Jan Jatzkowski

Jan@Jatzkowski.net

10. Mai 2007

# Übersicht

## Particles

Massless Marker Particles

## Particle Level Set Method

Initialization of Particles

Error Correction of the Level Set Function

Reinitialization

Particle Reseeding

## Zweck der Partikel

- ▶ Partikel enthalten Informationen zur Charakteristik der Oberfläche
- ▶ Dienen zur Detektion von Fehlern, die durch die Level Set Funktion hervorgerufen wurden
- ▶ Helfen bei der Rekonstruktion fehlerhaft berechneter Bereiche

## Massless Marker Particles

Um Fehler der Level Set Methode zu finden, benutzt man zwei Arten von Partikeln:

- ▶ Positive Partikel werden in  $\Omega^+$  ( $\Phi > 0$ ) platziert
- ▶ Negative Partikel werden in  $\Omega^-$  ( $\Phi \leq 0$ ) platziert

Ausgehend von einer *SDF* erübrigt es sich, Partikel weit entfernt von der Nullisokontur zu setzen, da diese Bereiche allein schon durch das Vorzeichen der Level Set Funktion korrekt identifiziert werden können

⇒ Reduktion der Menge zu implementierender Partikel

## Marker Particle Schemes

Es gibt verschiedene Ansätze, wie man die Partikel streut, z.B. traditionell über den gesamten Bereich oder auf eine Umgebung der Oberfläche begrenzt.

Die Partikel-Position wird im Verlauf der Methode mittels eines TVD Runge-Kutta Verfahrens 3. Ordnung berechnet.

## Partikel-Bewegung

Die Partikel-Bewegung wird auf Basis der Geschwindigkeitsgleichung

$$\frac{dx_p}{dt} = u(x_p)$$

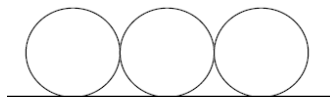
trilinear durch die Geschwindigkeiten des zugrunde liegenden Gitters interpoliert.

⇒ Genauigkeit 2. Ordnung

Verfahren höherer Ordnung sind zwar möglich, aber ein Verfahren 2. Ordnung wurde hier als ausreichend angesehen und bietet den Vorteil, weniger Rechenleistung zu benötigen.

Um die Rekonstruktion der Oberfläche zu ermöglichen, dürfen sich die Partikel-Sphären überschneiden

Three Non-Overlapping Circles



Six Overlapping Circles



**Vorteil:** Je mehr Partikel, desto besser die Oberflächen-Approximation durch die Partikel

Die Radien der Partikel-Sphären werden in Abhängigkeit von der Gitterfeinheit begrenzt, wobei z.B. mit folgender Wahl der Grenzen in der Praxis gute Ergebnisse erzielt wurden:

$$r_{min} = 0.1 \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$r_{max} = 0.5 \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Partikel sind masselos

⇒ Keine Inkonsistenz der Level Set Methode durch Überlappung verursacht.

Hinsichtlich der Charakteristik-Informationen, die die Partikel enthalten, bewirkt die Überlagerung lediglich, dass Informationen mehrfach vorhanden sind.



## Partikel Level Set Methode

Im folgenden wird die Vorgehensweise bei einer Partikel Level Set Methode anhand der von D. Enright, R. Fedwik, J. Ferziger und I. Mitchell veröffentlichten „Hybrid Particle Level Set Method For Improved Interface Capturing“ beschrieben.

## Initialisierung

Zu Beginn entscheidet man sich für eine Mindestanzahl von Partikeln, die von jeder Sorte in einer Gitterzelle liegen sollen. In den folgenden Beispielen gilt für dieses Minimum:

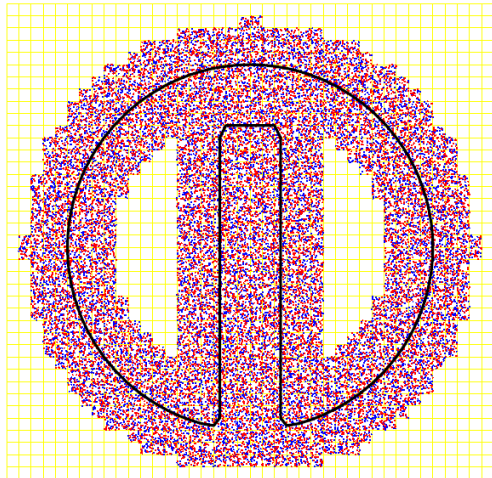
$$4^{\dim(\Omega)} \text{Partikel/Gitterzelle}$$

Nun platziert man beide Arten von Partikeln in allen Gitterzellen, die folgende Bedingung erfüllen:

$$|\Phi| < 3 \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Partikel zu platzieren. In unserem Beispiel wurden sie der Einfachheit halber zufällig gesetzt, was dennoch zu guten Ergebnissen geführt hat.

# Initialisierung der Partikel auf beiden Seiten der Nullisokontur



## Attracting particles

**Ziel:** Positive Partikel sollen in  $\Omega^+$ , negative Partikel in  $\Omega^-$  liegen, wobei ihr Abstand zur Nullisokontur zwischen  $b_{min}$  und  $b_{max}$  liegen soll:

$$\begin{aligned} b_{min} &= r_{min} \\ b_{max} &= 3 \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \end{aligned}$$

Um eine Zufallsverteilung der Partikel in Normalenrichtung bzgl. der Oberfläche zu erhalten, bestimmt man mittels Normalverteilung ein  $\Phi_{goal} \in ] \pm b_{min}, \pm b_{max}[$  für jedes Partikel.

Mit dem folgenden „attraction step“ sollen die Partikel nun auf der entsprechenden  $\Phi_{goal}$ -Isokontur platziert werden:

$$x_{new} = x_p + \lambda(\Phi_{goal} - \Phi_{x_p})N(x_p), \quad \lambda = 1$$

Es kann z.B. in „underresolved regions“ passieren, dass  $x_{new}$  nicht auf der  $\Phi_{goal}$ -Isokontur oder sogar außerhalb der Bandbreite  $[\pm b_{min}, \pm b_{max}]$  liegt

⇒ Mehrfaches Iterieren der Gleichung

$$x_{new} = x_p + \lambda(\Phi_{goal} - \Phi x_p)N(x_p)$$

Angenommen,  $x_{new}$  liegt außerhalb des Gitters

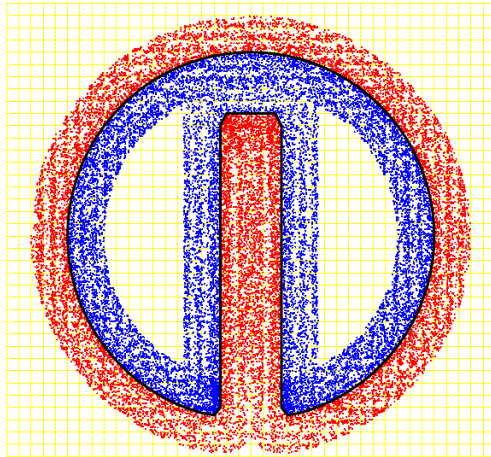
$\implies \lambda$  wird sukzessiv halbiert, bis das Partikel im Gitter liegt.

Ist dies schließlich der Fall, unterscheidet man folgende Fälle:

- ▶  $x_{new}$  liegt im gewünschten Band  
 $\implies$  Partikel bekommt diese Position zugewiesen
- ▶  $x_{new}$  liegt noch außerhalb des gewünschten Bandes  
 $\implies \lambda$  wird halbiert, man setzt  $x_p = x_{new}$  und führt die Berechnung erneut aus beginnend mit  $\lambda = 1$ .

Sollte nach einer bestimmten Anzahl von Iterationen die Partikel-Position noch immer nicht im Band liegen, wird das Partikel gelöscht.

## Partikel nach „attraction step“



## Radius setzen

Zuletzt wählt man den Radius eines Partikels derart, dass, wenn möglich, die Sphäre die Nullisokontur tangiert. Dazu setzt man

$$r_p = \begin{cases} r_{max} & s_p \Phi(x_p) > r_{max} \\ \Phi(x_p) & r_{min} \leq \Phi(x_p) \leq r_{max} \\ r_{min} & s_p \Phi(x_p) < r_{min} \end{cases}$$

Dabei gilt:  $s_p = \begin{cases} 1 & \text{positives Partikel} \\ -1 & \text{negatives Partikel} \end{cases}$



## Fehlerkorrektur in der Level Set Funktion

Nach jedem vollständig ausgeführten TVD Runge-Kutta Zyklus wird mit Hilfe der Partikel geprüft, ob die Level Set Funktion Fehler verursacht hat.

Dazu ermittelt man alle Partikel, die auf der falschen Seite der Nullisokontur liegen („escaped particles“). Man definiert

$$E^+ = \{x_p \in \Omega^- \mid x_p \text{ positives Partikel} \}$$

$$E^- = \{x_p \in \Omega^+ \mid x_p \text{ negatives Partikel} \}$$

Diese Partikel lassen vermuten, dass die Level Set Methode eine schlechte Lösung geliefert hat

## Fehlerkorrektur in der Level Set Funktion

Hat die berechnete schlechte Lösung Genauigkeit 1. Ordnung, so reichen Verfahren relativ geringer Ordnung (verglichen mit 5. Ordnung des *WENO*-Verfahrens) für die Partikel-Entwicklung und -Korrektur.

Resultat kann durch Einbeziehung der Charakteristik-Informationen, die die Partikel enthalten, deutlich verbessert werden, da die Level Set Funktion bei der falschen Berechnung diese evtl. gelöscht hat.

## Fehler-Identifikation

Zunächst muss aber entschieden werden, ab wann ein Partikel als „escaped“ aufgefasst wird.

Fasst man jede Grenzüberschreitung eines Partikels als Indikator für einen Fehler auf, so werden ständig numerische Fehler, wie z.B. Rundungsfehler, das Verfahren zur Korrektur zwingen. Um diese Fehler zu korrigieren, sind Verfahren höherer Ordnung notwendig.

Die Level Set Methode wird somit sowohl durch ständige Korrektur-Schritte als auch durch die genaueren aber auch aufwendigeren Verfahren zur Berechnung der Partikel-Entwicklung sehr langsam.

## „escape condition“

Alternativ kann ein Partikel als Ausreißer aufgefasst werden, wenn es z.B. um ein Vielfaches ( $\neq 0$ ) seines Radius auf der falschen Seite der Oberfläche liegt.

Wählt man den Partikel-Radius in  $O(\Delta x)$  werden nur Abweichungen 1. Ordnung zwischen Partikel und Level Set Lösung als Fehler identifiziert.

$\implies$  Verfahren 2. Ordnung für die Partikel und Level Set Methode verursachen keinen Fehler-Verdacht in „well resolved regions“. In „underresolved regions“ hingegen, wo die Level Set Methode eine schlechte Lösung 1. Ordnung liefert, identifiziert die Partikel-Entwicklung Fehler in der berechneten Oberfläche

## Fehlerquantifizierung

Die Sphäre eines Partikels kann wieder als lokal definierte Level Set Funktion aufgefasst werden:

$$\Phi_p(x) = s_p(r_p - |x - x_p|) \quad s_p = \begin{cases} 1 & \text{positives Partikel} \\ -1 & \text{negatives Partikel} \end{cases}$$

Dabei gilt:

- ▶ Die Nullisokontur entspricht der Sphärenoberfläche
- ▶ Die Level Set Funktion ist nur auf den 8 Eckpunkten der Gitterzelle definiert
- ▶ Die Werte von  $\Phi_p$  sind die vom Partikel prognostizierten Werte für die Level Set Funktion an den entsprechenden Stellen

Somit gilt:  $\Phi \neq \Phi_p \implies$  Möglicher Fehler in der Level Set Lösung

## Fehlerreduktion

Man verwendet die positiven „escaped particles“ zur Korrektur in  $\Omega^+$  und die negativen für  $\Omega^-$

Für jedes positive Partikel geht man z.B. wie folgt vor:

- ▶ Berechne mittels obiger Gleichung  $\Phi_p$  für jeden Eckpunkt der Gitterzelle in der das Partikel liegt.
- ▶ Vergleiche jedes  $\Phi_p$  mit dem lokalen Wert von  $\Phi$  und setze  $\Phi^+$  als deren Maximum.

⇒ Man erhält reduzierte Fehler-Repräsentation für  $\Omega^+$

Analog geht man für negative Partikel vor.

Berechnet wird dies wie folgt (mit  $\Phi^+$  bzw.  $\Phi^-$  initialisiert mit  $\Phi$ )

$$\Phi^+ = \max_{\forall p \in E^+} (\Phi_p, \Phi^+)$$

$$\Phi^- = \min_{\forall p \in E^-} (\Phi_p, \Phi^-)$$

Nun definiert man  $\Phi$  so, dass es das betragsmäßige Minimum der Funktionen  $\Phi^+$  und  $\Phi^-$  zurückgibt, d.h.

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^+ & |\Phi^+| \leq |\Phi^-| \\ \Phi^- & |\Phi^+| > |\Phi^-| \end{cases}$$

$\implies$  Partikel, die nahe der Nullisokontur liegen, erhalten größeren Einfluss bei der Rekonstruktion selbiger

## Reinitialisierung

Da der Partikel Level Set Methode eine *SDF* zugrunde liegt, wird die Level Set Funktion nach jedem Runge-Kutta Zyklus und anschließender Fehlerkorrektur mittels folgender Gleichung reinitialisiert:

$$\Phi_\tau + \operatorname{sgn}(\Phi_0)(|\nabla\Phi| - 1) = 0$$

$$\text{Dabei ist } \operatorname{sgn}(\Phi_0) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{\Phi_0^2 + (\Delta x)^2}}$$

Evtl. wird hierdurch die Nullisokontur verschoben. Dies soll ebenfalls mit Hilfe der Partikel korrigiert werden.



## Fehler der Reinitialisierung korrigieren

Den Partikeln wird für die Zeit der Reinitialisierung die gewünschte Geschwindigkeit der Nullisokontur zugewiesen.

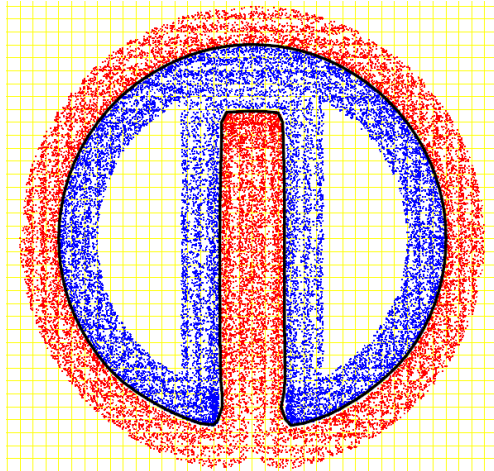
Anschließend können somit die Partikel zur Identifikation und Korrektur der Fehler benutzt werden, die von der Reinitialisierung verursacht wurden.

Zuletzt wird, analog zur Initialisierung, der Partikel-Radius angepasst.

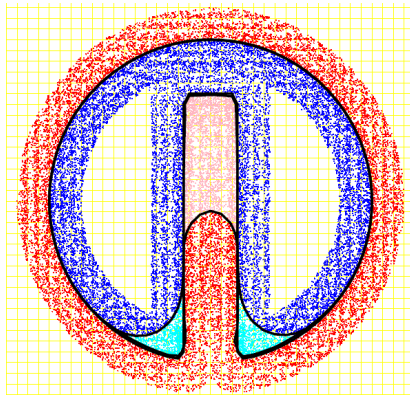
## Ein Durchlauf der Methode

- ▶ Zeitschritt für Partikel und Level Set Funktion
- ▶ Mit Partikeln Fehler der Level Set Funktion korrigieren
- ▶ Reinitialisierung durchführen
- ▶ Mit Partikeln Fehler der Level Set Funktion korrigieren
- ▶ Partikel-Radius anpassen

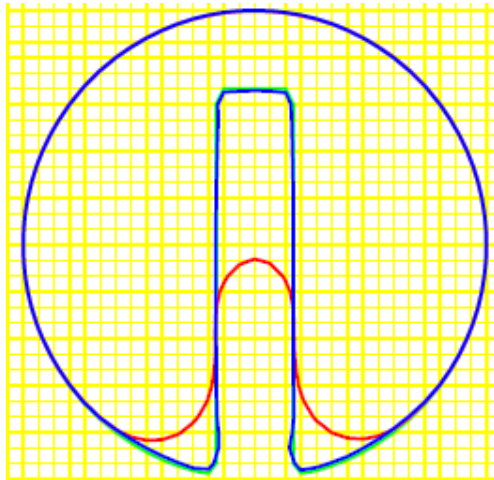
## Partikel Level Set Lösung nach einem Durchlauf



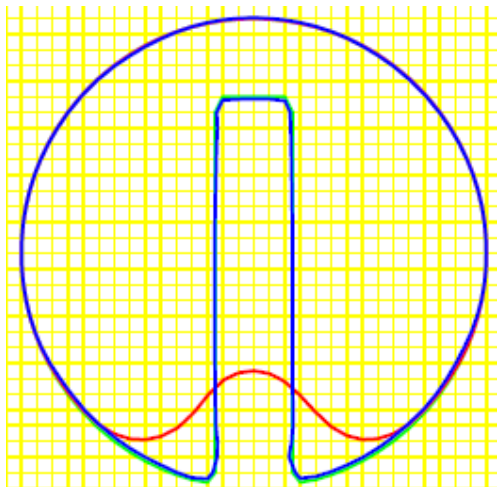
# Vergleich von Partikel Level Set, Level Set und theoretischer Lösung



Nach einer Durchführung



Nach einer Durchführung



Nach zwei Durchführungen

## Particle Reseeding

Um die Entwicklung der Nullisokontur über längere Zeit richtig zu berechnen, muss die Partikel-Verteilung periodisch angepasst werden.

### Partikel löschen

Partikel, die sich zu weit von der Nullisokontur entfernt haben, werden gelöscht, da die in ihnen enthaltenen Informationen zu wenig Einfluss auf weitere Berechnungen haben. Solche Partikel sind

$$\Phi(x_p) \begin{cases} > b_{max} & x_p \in \Omega^+ \\ < -b_{max} & x_p \in \Omega^- \end{cases}$$

## Eigenschaften des Reseeding-Algorithmus

- ▶ Partikel nahe der Nullisokontur behalten ihre Position, da ihre Informationen aus vorangegangenen Durchläufen stammt und sie somit im weiteren Verlauf als Ausreißer wichtig werden können
- ▶ „Escaped particles“ werden nicht gelöscht, um von der Level Set Funktion verworfene Informationen zu behalten.



## Funktionsweise des Reseedings

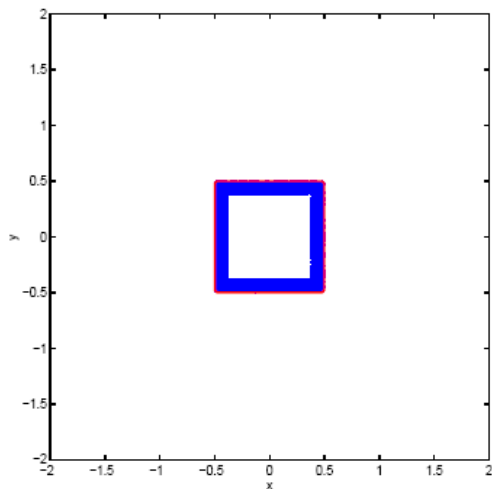
- ▶ Identifiziere in jeder Zelle die „non-escaped“ Partikel
- ▶ Bestimme mittels Level Set Funktion, ob Zelle in der Bandbreite liegt
  - ▶ Ja  $\implies$  Prüfe, ob Mindestanzahl an Partikeln in Zelle vorhanden ist. Fülle gegebenenfalls Zelle auf und führe für die neuen Partikel „attraction step“ aus
  - ▶ Nein  $\implies$  Lösche alle „non-escaped“ Partikel

Sollten zu viele „non-escaped“ Partikel in einer Zelle liegen, wird, in unserem Fall mittels einer Heap-Datenstruktur, ihre Anzahl reduziert, wobei nur die Partikel behalten werden sollen, die möglichst nahe der Nullisokontur liegen.

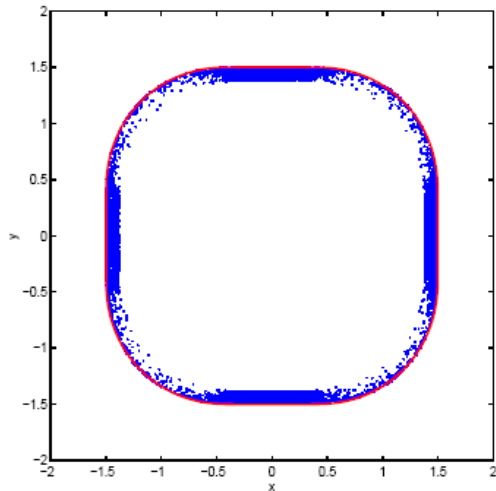
Reseeding ist Problemabhängig,  
 d.h. Zeitpunkte, zu denen ein Reseeding durchgeführt wird, können durch Zeitintervalle oder bestimmte Entwicklungen der Oberfläche (z.B. Ausdehnung) gesetzt werden.

Exzessives Reseeding hat in „underresolved regions“ das Problem, dass die neuen Partikel auf Basis der vorliegenden Gegebenheiten initialisiert werden, sodass sie keine Verbesserung mehr bewirken. Tatsächlich wird das Ergebnis bei derartigem Vorgehen dann sogar verschlechtert!

## Partikel innerhalb eines expandierenden Quadrats initialisiert



## Endposition von passiv bewegten Partikeln



## Partikel nach einem Reseeding-Durchlauf

