

# Level-Set Methoden für Inverse Probleme

Seminar Level-Set Methoden, SS 2007  
bei Prof. Dr. Martin Burger

Thomas Pelster    Andree Große

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

12. Juli 2007











# Beispielproblem 1: Erkennung von Einschlüssen

- **Problem:** Finde Einschlüsse oder Hohlräume in elastischen Materialien, d.h. finde ein Gebiet  $\Omega \subset D$  (vgl. Abb. 2).
- Dazu werden Messungen  $f_k = u_k|_M$ ,  $M \subset \partial D$  für verschiedene Belastungen  $g_k$  durchgeführt ( $k = 1, \dots, N$ ), wobei  $u_k$  Lösung ist von:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_k &= 0 && \text{in } D \setminus \Omega \\
 u_k &= 0 && \text{auf } \Gamma \subset \partial D \\
 \frac{\partial u_k}{\partial n} &= g_k && \text{auf } \partial D \setminus \Gamma \\
 \frac{\partial u_k}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \partial \Omega
 \end{aligned} \tag{1}$$

- Das Inverse Problem entspricht Minimierung von

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_M |u_k - f_k|^2 d\mathcal{H}^{d-1}$$



## Beispielproblem 2: Bandstruktur-Design

- Eine wichtige Klasse von Problemen ist die Minimierung von Eigenwerten:

$$J(\Omega) = \hat{J}(\Lambda(\Omega))$$

wobei  $\Lambda(\Omega) = (\lambda_j(\Omega))_{j \in \mathbb{N}}$  die absteigend geordneten Eigenwerte bezüglich der Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(q_0 + q_1 \chi_\Omega)u && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D \end{aligned} \quad (2)$$

sind.

- Anwendung zum Beispiel: Design von photonischen Kristallen
- Mögliche Aufgaben sind die Minimierung oder Maximierung des ersten Eigenwertes ( $\hat{J}(\Lambda) = \pm \lambda_1$ ) oder die Maximierung einer Bandlücke ( $\hat{J}(\Lambda) = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ ).

## Beispielproblem 3: Rekonstruktion

- **Ziel:** Rekonstruktion eines stückweise konstanten Quellterms in einer partiellen Differentialgleichung, die an der Schnittstelle zweier Gebiete unstetig ist
- Einfachstes Problem: Finde  $\Omega \subset D$  mit Messungen  $z = u|_M$  für  $M \subset D$  oder  $M \subset \partial D$ , wobei

$$\begin{aligned} -\Delta u - \chi_\Omega &= 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } \partial D \end{aligned} \quad (3)$$

- Das Formfunktional sei

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_M |u - z|^2 d\mu$$

# Entwicklung einer Formschar

Für eine gegebene Menge  $\Omega$  können wir die zeitliche Entwicklung der Mengen  $\Omega(t)$  in einem Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{V}$  definieren:

$$\Omega(t) = \left\{ y(t) \mid y(0) \in \Omega, \frac{dy}{dt}(\tau) = \mathbf{V}(y(\tau)) \text{ in } (0, t) \right\} \quad (4)$$

Die Formableitung eines Funktionals  $J$  in Richtung  $\mathbf{V} \in C^{0,1}(\mathbb{R}^d)$  ist dann:

$$dJ(\Omega; \mathbf{V}) = \frac{d}{dt} J(\Omega(t)) \Big|_{t=0}$$

# Formableitung

Hadamard-Zolésio: Unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen existiert ein  $\nabla J \in C^\infty$ , sodass

$$dJ(\Omega; \mathbf{V}) = \langle \nabla J, \mathbf{V} \rangle_{\partial\Omega \cdot n}$$

Wir schreiben mit  $V_n := \mathbf{V} \cdot n$ :

$$dJ(\Omega; \mathbf{V}) = J'(\Omega) V_n$$

Es gilt also

$$J'(\phi(\cdot, 0) < 0) V_n = \frac{d}{dt} J(\phi(\cdot, t) < 0) \Big|_{t=0} \quad (5)$$

- Es gibt zwei Grundformen von Formfunktionalen:
- *Gebietsfunktionale* der Form

$$J_{dom}(\Omega) = \int_{\Omega} g \, dx$$

- *Randfunktionale* der Form

$$J_{bd}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} g \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

für eine hinreichend glatte Funktion  $g$

# Formableitung von Gebietsfunktionalen

Für  $g \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  und ein beschränktes messbares Gebiet  $\Omega$  existiert die Formableitung von  $J_{dom}$  und ist gegeben durch

$$dJ_{dom}(\Omega; \mathbf{V}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(g\mathbf{V}) \, dx$$

Falls  $\Omega$  ein offenes Gebiet mit Lipschitz-Rand ist, dann gilt nach dem Gauß'schen Integralsatz:

$$J'_{dom}(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} g V_n \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

# Formableitung über Level-Set Methoden

Aus (5) können wir die Formableitung direkt aus der Level-Set Methode berechnen.

Erinnerung:

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \phi(x, t) < 0\}$$

und  $\phi$  löst die Level-Set Gleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_n |\nabla \phi| = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

Sei  $J$  z.B. ein Volumenfunktional der Form ( $H$  Heaviside-Funktion)

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) H(-\phi(x, 0)) dx$$

Dann folgt

$$J'(\Omega) V_n = \left. \frac{d}{dt} J(\Omega(t)) \right|_{t=0} = \int_{\{\phi(\cdot, 0)=0\}} g V_n d\mathcal{H}^{d-1}$$

# Formableitung von Randfunktionalen

Für  $g \in W_{loc}^{2,2}(\mathbb{R}^d)$  und ein beschränktes messbares Gebiet  $\Omega$  mit  $\partial\Omega \in C^2$  existiert die Formableitung von  $J_{bd}$  für alle  $\mathbf{V} \in C_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$  und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} dJ_{bd}(\Omega; \mathbf{V}) &= \int_{\partial\Omega} \operatorname{div}(g\mathbf{n}) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + g\kappa \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^{d-1} \end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{n}$  die äußere Normale und  $\kappa$  die Krümmung ist. Hier gilt:

$$J'_{bd}(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + g\kappa \right) V_n \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

# Level-Set-basierte Formoptimierung

- 1 Die zu optimierende Form wird als Nullstellenmenge einer stetigen Funktion  $\phi$  repräsentiert.
- 2 Wähle ein Formfunktional  $J(\Omega(t))$  und berechne  $dJ(\Omega(t); \mathbf{V})$
- 3 Berechne hieraus eine Geschwindigkeit  $V_n$ , sodass  $dJ(\Omega(t); \mathbf{V}) < 0$
- 4 Führe mit diesem  $V_n$  einen Iterationsschritt aus, d.h. überführe  $\Omega_k$  nach  $\Omega_{k+1}$ .
- 5 Durch Iteration der letzten beiden Punkte wird  $J(\Omega(t))$  minimiert, d.h. die Form  $\Omega(t)$  entwickelt sich zur optimalen Form.

# Gradientenverfahren

- Gradientenabstiegsverfahren (vgl. [5]) für Level-Set Methoden funktionieren analog zu Gradientenverfahren in klassischen Optimierungsproblemen.
- **Problem:** Verhältnis von Schrittweite zum Gradienten (d.h. der Formableitung), da es keine zugrundeliegende Vektorraumstruktur gibt
- Als ersten Ansatz betrachten wir Probleme der Form

$$J'(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} V_n \rho_\Omega \, d\mathcal{H}^{d-1} \quad (6)$$

für eine Dichtefunktion  $\rho_\Omega$

- Hier können wir

$$V_n(\cdot, t) = -\rho_{\Omega(t)} \quad \text{auf } \partial\Omega$$

wählen und erhalten

$$\frac{d}{dt} J(\Omega(t)) = J'(\Omega(t)) V_n(\cdot, t) = - \int_{\partial\Omega} |\rho_{\Omega(t)}|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

# Verallgemeinerung des Gradientenverfahren

- Da  $J'(\Omega)$  ein lineares Funktional von  $V_n$  ist, ist die Darstellung (6) nach dem Riesz'schen Darstellungssatz möglich, falls  $J'(\Omega)$  ein lineares stetiges Funktional auf  $L^2(\partial\Omega)$  ist.
- Ist dies nicht der Fall, so wähle einen Hilbertraum  $\mathcal{V}(\Omega)$ , auf dem  $J'(\Omega)$  ein lineares stetiges Funktional ist
- Anstelle von (6) benutzen wir nun die schwache Form

$$-J'(\Omega(t)) W_n = \langle V_n(\cdot, t), W_n \rangle_{\mathcal{V}(\Omega(t))} \quad \forall W_n \in \mathcal{V}(\Omega(t)) \quad (7)$$

# Beispielproblem 1 - Erkennung von Einschlüssen

Das Formfunktional für Beispielproblem 1 lautete

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_M |u_k - f_k|^2 d\mathcal{H}^{d-1} \quad (8)$$

Dafür definieren wir die Lösung  $w_k$  des adjungierten Problems

$$\begin{aligned} \Delta w_k &= 0 && \text{in } D \setminus \Omega \\ w_k &= 0 && \text{auf } \Gamma \subset \partial D \\ \frac{\partial w_k}{\partial n} - \chi_M(u_k - f_k) &= 0 && \text{auf } \partial D \setminus \Gamma \\ \frac{\partial w_k}{\partial n} &= 0 && \text{auf } \partial \Omega \end{aligned}$$

mit der Indikatorfunktion  $\chi_M$ .

- Als Formableitung erhalten wir

$$J'(\Omega) V_n = - \sum_{k=1}^N \int_{\partial\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla w_k V_n d\mathcal{H}^{d-1}$$

- Aufgrund der homogenen Neumann-Randbedingungen für  $u_k$  und  $w_k$  auf  $\partial\Omega$  vereinfacht sich dies für  $d = 2$  zu

$$J'(\Omega) V_n = - \sum_{k=1}^N \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial w_k}{\partial \tau} V_n d\mathcal{H}^1$$

Aus (7) ergibt sich die Gleichung

$$\langle V_n, W_n \rangle_{H^1(D)} = \sum_{k=1}^N \int_{\partial\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla w_k W_n d\mathcal{H}^{d-1} \quad \forall W_n \in H_0^1(\Omega)$$

Dies ist die schwache Formulierung von

$$\begin{aligned} -\Delta V_n + V_n &= 0 && \text{in } D \\ V_n &= 0 && \text{auf } \partial D \\ \left[ \frac{\partial V_n}{\partial n} \right] - \sum_{k=1}^N \nabla u_k \cdot \nabla w_k &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei  $[\cdot]$  der Sprung bei  $\partial\Omega$  ist.

# Projizierte Gradientenverfahren

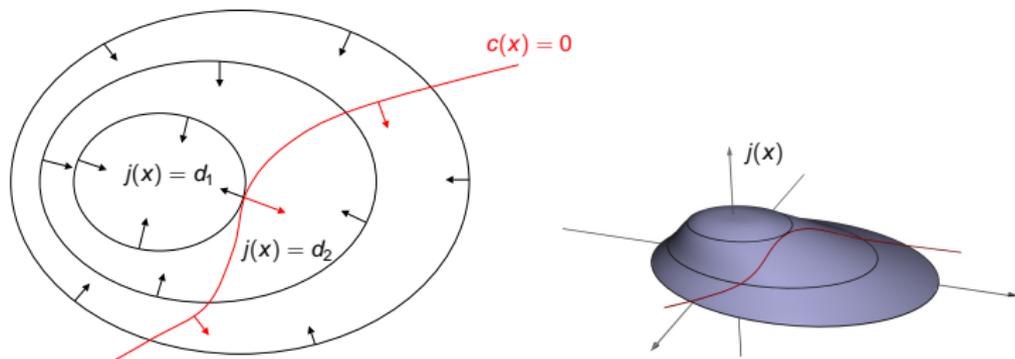
- Wir betrachten Bedingungen der Form

$$C(\Omega) = 0$$

für einen Operator  $C$ , der in einen Banachraum  $\mathcal{U}$  abbildet

- Hierfür können wir ebenfalls eine Formableitung definieren und erhalten daraus ein Projiziertes Gradienten-Verfahren

# Optimierung mit Lagrange-Multiplikatoren



**Abbildung:** Optimierung über die Lagrange-Funktion: Suche Maximum von  $j(x)$ , indem Punkte auf der Mannigfaltigkeit  $c(x) = 0$  gesucht werden, die eine Isokontur  $j(x) = d_i$  berühren

Wir wollen

$$\min_x j(x) \quad \text{mit} \quad c(x) = 0 \quad (9)$$

lösen. Suche dazu Punkte  $x$ , sodass  $\nabla j$  ein Vielfaches von  $\nabla c$  für die implizit definierte Funktion  $c(x) = 0$  ist (vgl. Abb. 3). Für ein vorerst unbekanntes  $p$  definieren wir:

$$\mathcal{L}(x, p) = j(x) + p \cdot c(x)$$

$p$  heißt *Lagrange-Multiplikator* oder auch *duale Variable*. Dann gilt

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, p) = 0 &\Leftrightarrow \nabla_x j(x) = -p \nabla_x c(x) \\ \nabla_p \mathcal{L}(x, p) = 0 &\Leftrightarrow c(x) = 0 \end{aligned}$$

Um (9) zu lösen suchen wir also Punkte mit

$$\nabla \mathcal{L}(x, p) = 0$$

# Lagrange-Multiplikatoren für Formfunktionale

- Für den Operator  $C(D \subset \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{U}$  betrachten wir also

$$\mathcal{L}(\Omega; p) = J(\Omega) + \langle p, C(\Omega) \rangle$$

für die duale Variable  $p \in \mathcal{U}^*$

- Die Formableitung der Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}'(\Omega; p) V_n = J'(\Omega) V_n + \langle p, C'(\Omega) V_n \rangle$$

- Lösung des Optimierungsproblem ist Sattelpunkt der Lagrange-Funktion  $\rightarrow$  führe Gradientenabstieg durch

- Ersetze (7) durch

$$\langle V_n(\cdot, t), W_n \rangle_{\mathcal{V}(\Omega(t))} = -\mathcal{L}'(\Omega(t); p(t)) W_n \quad \forall W_n \in \mathcal{V}(\Omega(t)) \quad (10)$$

- Füge 2. Gleichung hinzu:

$$C'(\Omega(t)) V_n(\cdot, t) = \frac{d}{dt} C(\Omega(t)) = 0 \quad (11)$$

- Aus (10) und (11) können wir nun  $V_n(\cdot, t)$  und  $p(t)$  bestimmen

Wir betrachten als wichtigen Spezialfall die Bedingung, dass die Fläche konstant bleibt, d.h.

$$C(\Omega) = \int_{\Omega} dx - c$$

Hier erhalten wir

$$C'(\Omega) V_n = \int_{\partial\Omega} V_n d\mathcal{H}^{d-1}$$

Sei  $V_n^0$  die Geschwindigkeit, die wir aus (7) erhalten würden. Damit  $C(\Omega) = 0$  erfüllt bleibt, errechnen wir

$$V_n = V_n^0 - \frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} V_n^0 d\mathcal{H}^{d-1} \quad (12)$$

## Beispielproblem 2 - Bandstruktur-Design

- Betrachte  $\hat{J}(\Lambda) = -\lambda_1$ , d.h. Maximierung des ersten Eigenvektors
- Die schwache Form der Helmholtzgleichung (2) lautet:

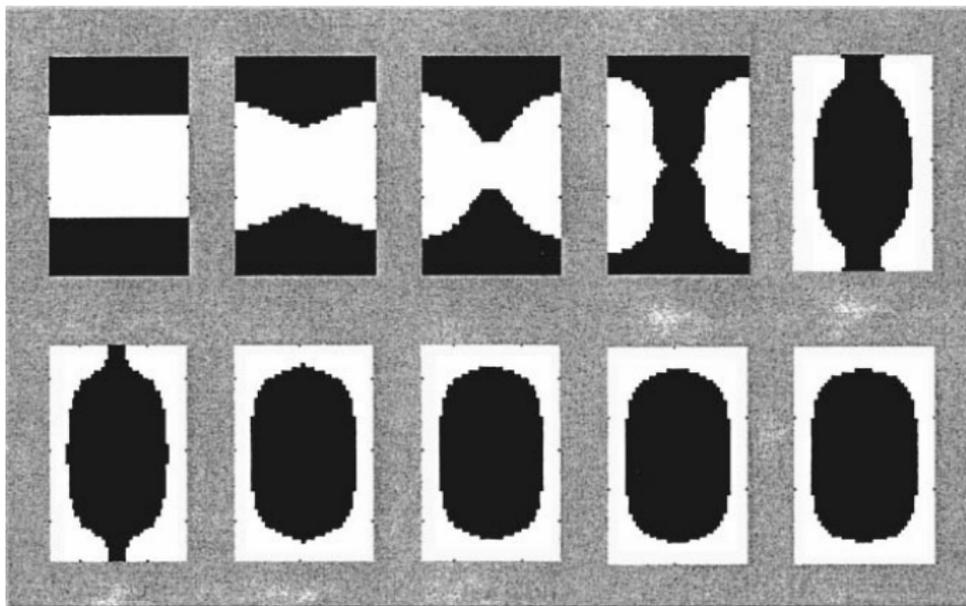
$$\int_D \nabla u_1 \cdot \nabla v \, dx = \lambda_1 \int_D (q_0 + q_1 \chi_\Omega) u_1 v \, dx \quad (13)$$

- Daraus ergibt sich (für  $v = u_1$ )

$$\lambda_1 = \frac{\int_D |\nabla u_1|^2 \, dx}{\int_D (q_0 + q_1 \chi_\Omega) u_1^2 \, dx}$$

$u_1$  ist hierbei der erste Eigenvektor mit Normierung

$$\int_D (q_0 + q_1 \chi_\Omega) u_1^2 \, dx = 1 \quad (14)$$



**Abbildung:** Maximierung von  $\lambda_1$ : Die Dichtefunktion nach verschiedenen Iterationsschritten (aus Osher & Santosa [4])

## Newton-ähnliche Verfahren

- Für eine Funktion  $f(x)$  lautet die Taylor-Entwicklung vom Grad 2:

$$f(x + \epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x)\epsilon^2$$

- Analog ist die quadratische Approximation von  $J(\Omega)$  bzgl. der Schrittweite, also  $V_n$ :

$$J(\Omega) + J'(\Omega)V_n + \frac{1}{2}J''(\Omega)(V_n, V_n)$$

- Dieser Term wird minimal, wenn die Newton Gleichung

$$J''(\Omega)(V_n, W_n) = -J'(\Omega)W_n \quad \forall W_n \in \mathcal{V}(\Omega) \quad (15)$$

erfüllt ist.

- Falls  $J''$  positiv definit ist erhalten wir hieraus ein  $V_n$ , das das Formfunktional  $J$  minimiert, da es dann ein  $\beta < 0$  gibt, sodass

$$\frac{d}{dt}J(\Omega(t)) V_n = -J''(\Omega)(V_n, V_n) \leq \beta \|V_n\|^2$$

# Gauß-Newton Verfahren für kl.-Quadrate-Methode

- Für Funktionale der Form

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \|\mathcal{F}(\Omega) - \mathbf{z}\|^2, \quad \mathcal{F} : \mathcal{K}_{ad} \rightarrow \mathcal{L}$$

kann man Gauß-Newton-ähnliche Verfahren wie das Levenberg-Marquardt Verfahren verwenden.

- Hierzu bilden wir die ersten beiden Formableitungen von  $J$ :

$$\begin{aligned} J'(\Omega)V_n &= \langle \mathcal{F}'(\Omega)V_n, \mathcal{F}(\Omega) - \mathbf{z} \rangle \\ J''(\Omega)(V_n, W_n) &= \langle \mathcal{F}'(\Omega)V_n, \mathcal{F}'(\Omega)W_n \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{F}''(\Omega)(V_n, W_n), \mathcal{F}(\Omega) - \mathbf{z} \rangle \end{aligned}$$

- Durch Weglassen der 2. Ableitungen von  $\mathcal{F}$  erhalten wir:

$$\langle \mathcal{F}'(\Omega)V_n, \mathcal{F}'(\Omega)W_n \rangle = - \langle \mathcal{F}'(\Omega)W_n, \mathcal{F}(\Omega) - \mathbf{z} \rangle \quad \forall W_n \in \mathcal{V}(\Omega(t)) \quad (16)$$

- Um die Iteration zu stabilisieren und um eine schlechte Konditionierung des linearen Systems zu vermeiden fügt man einen zusätzlichen quadratischen Term der Form  $\alpha \|V_n\|_{\mathcal{Y}(\Omega)}^2$  hinzu. (Levenberg-Marquardt Strategie)
- Dies führt zu dem linearen System

$$\langle \mathcal{F}'(\Omega) V_n, \mathcal{F}'(\Omega) W_n \rangle + \alpha \langle V_n, W_n \rangle_{\mathcal{Y}(\Omega)} = - \langle \mathcal{F}'(\Omega) W_n, \mathcal{F}(\Omega) - \mathbf{z} \rangle \quad (17)$$

- Für  $\alpha > 0$  ist dieses System automatisch gut gestellt und man kann eine absteigende Eigenschaft nachweisen.

## Beispielproblem 3 - Rekonstruktion

- Wir wenden das Levenberg-Marquardt Verfahren nun auf Beispielproblem 3 an.
- Die Ableitung von  $\mathcal{F}(\Omega) = u|_M$  bzgl. der Form ist:

$$\mathcal{F}'(\Omega)V_n = u'|_M \quad (18)$$

wobei  $u' \in H_0^1(D)$  die schwache Lösung von

$$\int_D \nabla u' \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} V_n d\mathcal{H}^{d-1}, \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

ist.

# Rekonstruktion

- Weiter gilt:

$$\mathcal{F}'^*(\Omega)(\mathcal{F}(\Omega) + \mathcal{F}'(\Omega)V_n - z) = w|_{\partial\Omega} \text{ in } L^2(\partial\Omega) \quad (19)$$

wobei  $w$  die Lösung des adjungierten Problems ist:

$$\int_D \nabla w \nabla v \, dx = \int_M (u + u' - z)v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

- So erhalten wir zur Bestimmung der Geschwindigkeit folgende Gleichung:

$$\alpha V_n + w = 0 \quad (20)$$

- Aus (18), (19) und (20) kann man nun  $u'$ ,  $w$  und schließlich  $V_n$  bestimmen.

# Erhalten der Topologie

- In manchen Anwendungen soll die Topologie einer Form erhalten bleiben (z.B. Designoptimierung).
- Dazu verwenden wir eine variierte Version des Formfunktionals, und zwar für kleine  $\epsilon > 0$ :

$$J_\epsilon(\Omega) := J(\Omega) + \epsilon H(\Omega)$$

mit

$$H(\Omega) = - \int_{\partial\Omega} (\log [d_\Omega(\mathbf{x} + \sigma \nabla d_\Omega(\mathbf{x}))] + \log [-d_\Omega(\mathbf{x} - \sigma \nabla d_\Omega(\mathbf{x}))]) d\mathcal{H}^{d-1}$$

Dabei ist  $d_\Omega$  die *signed distance function* zu  $\partial\Omega$ , d.h. es ist

$$\begin{aligned} d_\Omega(\mathbf{x}) &> 0 && \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \\ d_\Omega(\mathbf{x}) &< 0 && \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

(siehe Abb. 5 und 6)

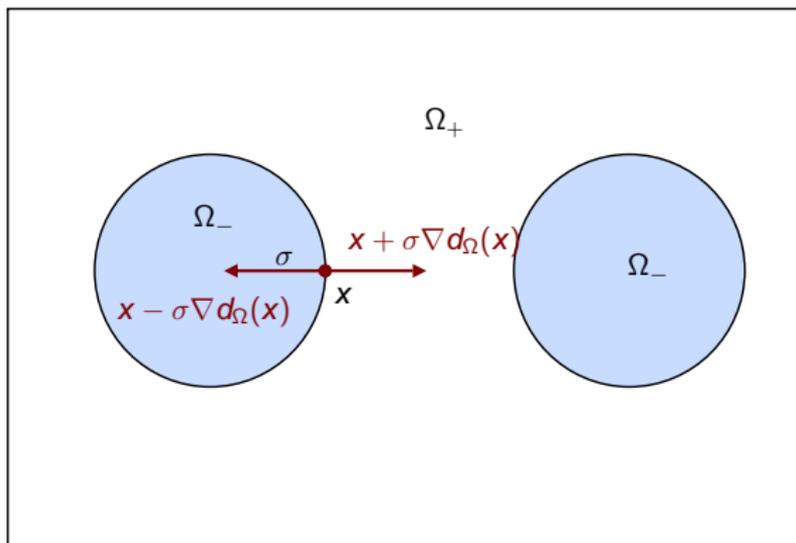


Abbildung:  $d_\Omega(x + \sigma \nabla d_\Omega(x)) > 0$  und  $-d_\Omega(x - \sigma \nabla d_\Omega(x)) > 0$

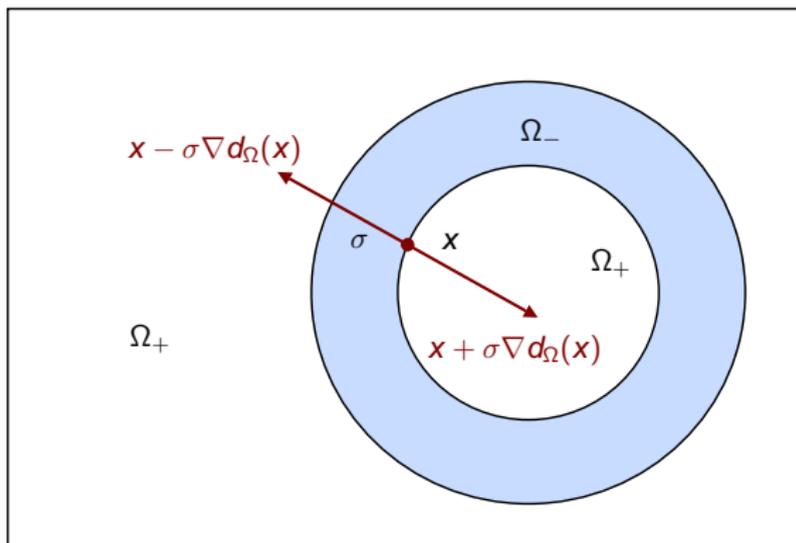


Abbildung:  $d_\Omega(x + \sigma \nabla d_\Omega(x)) > 0$ , aber  $-d_\Omega(x - \sigma \nabla d_\Omega(x)) < 0$



# Bildung von Löchern

- Nun kann  $g$  entweder zur Formableitung  $J'$  oder direkt zur Level-Set Gleichung hinzugefügt werden:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_n |\nabla \phi| = -g$$

- In  $\Omega_-$  gilt:
  - Ist  $g(x) < 0$ , so sollte an dieser Stelle ein Loch entstehen, d.h.  $\phi$  sollte ansteigen.
  - Ist  $g(x) > 0$ , so sollte hier kein Loch entstehen.
- In  $\Omega_+$  gilt:
  - Ist  $g(x) < 0$ , so sollte an dieser Stelle ein zusätzliches Gebiet  $\Omega_-$  entstehen, d.h.  $\phi$  sollte fallen.
  - Ist  $g(x) > 0$ , so sollte  $\phi$  hier nicht fallen.

# Literaturverzeichnis I

-  ALLAIRE, GRÉGOIRE: *Persönliche Homepage*.  
<http://www.cmap.polytechnique.fr>, 14. Juni 2007.
-  BURGER, MARTIN: *Vorlesungsskript Inverse Probleme*, 2005.
-  BURGER, MARTIN UND OSHER, STANLEY J.: *A survey on level set methods for inverse problems and optimal design*.  
European Jnl of Applied Mathematics, 16:263–301, 2005.
-  OSHER, STANLEY J. UND SANTOSA, FADIL: *Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints I. Frequencies of a two-density inhomogeneous drum*.  
Journal of Computational Physics, 171:272–288, 2001.
-  SANTOSA, FADIL: *A level-set approach for inverse problems involving obstacles*.  
ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 1:17–33, 1996.