Übung zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 9, Abgabe bis 9.1.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Ableitungen I:*
   Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^d$. Das nichtlineare Funktional $F : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

   $$F(u) = \int_\Omega G(u(x))\; dx,$$

   wobei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit global beschränkter Ableitung ist. Berechnen sie die Richtungs- bzw. Gateauxableitung von F und zeigen Sie, dass F Frechet-differenzierbar ist.

2. *Ableitungen II:*
   Berechnen sie formal die Richtungs- bzw. Gateaux-ableitungen (nach allen drei Variablen) des Lagrangefunktionals

   $$L(u, p, lambda) = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (u(x) - y(x))^2\; dx + \int_0^1 p(x) u'(x) \lambda'(x)\; dx,$$

   wobei v' die erste Ableitung einer Funktion v bezeichnet. Welchem System von Differentialgleichungen entspricht die Optimalitätsbedingung $L'(u, p, \lambda) = 0$.

3. *Unterhalbstetigkeit:*
   Sei $F : X \to Y$ ein stetiger Operator zwischen den Hilberträumen X und Y. Zeigen Sie, dass das least-squares Funktional

   $$J : X \to \mathbb{R}, \quad J(x) = \|F(x) - y\|^2$$

   für fixes $y \in Y$ unterhalbstetig in der Norm-Topologie von X ist.

4. *Regularisierung:* **Abgabe bis 16.1.08**
   Implementieren Sie eine Regularisierungsmethode ihrer Wahl zur Berechnung der zweiten Ableitung einer Funktion $\mathbf{x} : [0, T] \to \mathbb{R}^3$. Die Werte von $\mathbf{x}$ sind dabei an diskreten Stützstellen gegeben. Wenden sie die Methoden auf die auf der Vorlesungs-Website zur Verfügung gestellten Jonglier-Datensätze an.

Schöne Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2008 !