

# Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 8, Abgabe bis 12.12.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

## 1. Lavrentiev-Regularisierung

Sei  $A : X \rightarrow Y$  ein kompakter, linearer Operator und  $(\sigma_n, u_n, v_n)$  die Singulärwertzerlegung von  $A$ . Für  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  wird der lineare Operator  $R_\alpha : Y \rightarrow X$  durch

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n + \alpha} \langle y, v_n \rangle u_n$$

definiert. Zeigen Sie, dass die Familie  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}_{>0}}$  eine Regularisierung von  $A^\dagger$  ist.

## 2. Asymptotische Regularisierung

Sei  $A : X \rightarrow Y$  ein kompakter, linearer Operator und  $(\sigma_n, u_n, v_n)$  die Singulärwertzerlegung von  $A$ . Betrachten Sie für  $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$  die Fixpunktiteration

$$x^{k+1} = x^k + \tau A^*(y - Ax^k), \quad x^0 = 0,$$

aus der Vorlesung. Die zugehörige Familie von Operatoren  $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(Y, X)$  erhalten wir aus  $R_k y := x_k$ .

(a) Bestimmen Sie die Funktion  $g_k(\sigma)$  in der Singulärwertdarstellung

$$R_k y = \sum_{n=1}^{\infty} g_k(\sigma_n) \langle y, v_n \rangle u_n$$

von  $R_k$ .

(b) Zeigen Sie, dass  $g_k(\sigma)$  punktweise gegen  $\frac{1}{\sigma}$  für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert und dass  $g_k$  beschränkt ist.

## 3. Tikhonov-Regularisierung von Integraloperatoren

Implementieren Sie numerisch die Tikhonov-Regularisierung eines Integraloperators aus Übungsblatt 5, Aufgabe 1 (ii). Sie können Ihre Implementierung aus Übungsblatt 5, Aufgabe 2 verwenden. Testen Sie Ihr Programm für  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\Omega_{i,j} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$ ,

$$k(s, t) = \sin(2\pi st) \quad \text{und} \quad y(s) = (Kx)(s) = \frac{s(1 - \cos(2\pi s))}{2\pi(1 + s^2)}.$$

Plotten Sie die Ergebnisse für  $\alpha = \{0.1, 0.01, 0.001\}$ .

## 4. TSVD

Wir betrachten den Integraloperator  $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  definiert durch

$$(Kx)(s) = \int_0^s x(t) dt, \quad s \in [0, 1].$$

Benutzen Sie die Singulärwertzerlegung aus Übungsblatt 6, Aufgabe 1 (i) und implementieren Sie die abgeschnittene SVD. Stören Sie die Funktion

$$y(s) = (Kx)(s) = \frac{1 - \cos(2\pi s)}{2\pi}$$

mit  $\delta$  Ihrer Wahl und vergleichen Sie für verschiedene  $\alpha$  die Ergebnisse mit der exakten Lösung

$$x(t) = \sin(2\pi t).$$