Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 7, Abgabe bis 05.12.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Spektrum und Eigenwerte einer Operatorgleichung*
   Der Operator $A : C(0,1) \to C(0,1)$ sei definiert durch $Af(t) = tf(t)$. Zeigen Sie:

   (a) A ist linear und stetig mit Norm 1.

   (b) A besitzt *keine* Eigenwerte und $\sigma(A) = [0,1]$.

2. *Verallgemeinerte Inverse*
   Sei $a < b$. Bestimmen Sie die verallgemeinerte Inverse folgender Operatoren.

   (a) $A : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$, $\quad f \mapsto gf$, wobei $0 \neq g \in C(a,b)$ ist.

   (b) $A : L^2(a,b) \to \mathbb{R}$, $\quad f \mapsto \int_a^b f(t)\, dt$.

   (c) $A : L^2(a,b) \to \mathbb{R}^n$, $f \mapsto (\int_a^b f(t)w_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f(t)w_n(t)\, dt)^T$, mit dem Orthonormalsystem $\{w_1, \ldots, w_n\}$ in $L^2(a,b)$.

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Unterräume $\mathcal{N}(A)$ und $\mathcal{R}(A)$, sowie ihre Orthogonalräume. Berechnen Sie dann $\tilde{A}^{-1}$ der Einschränkung $\tilde{A} : \mathcal{N}(A)^\perp \to \mathcal{R}(A)$ von A aus der Vorlesung.

3. *Radon-Transformation*
   Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit kompaktem Träger in einer Kugel um 0 mit Radius $\rho > 0$ und $R : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ die Radon-Transformation definiert durch

   $$Rf(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp)\, dt ,$$

   wobei $\theta^\perp$ der orthogonale Vektor zu θ ist. Zeigen Sie:

   (a) Die Radon-Transformation ist linear und stetig mit Norm $\|R\| \leq \sqrt{2\rho|S^{n-1}|}$.

   (b) Die Abbildung $R^* \in \mathcal{L}(L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}^n))$ definiert durch

   $$R^*g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta)\, d\sigma(\theta)$$

   ist die adjungierte Abbildung zu $R \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$.
   Hinweis: Auf $L^2(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ wird das Skalarprodukt durch

   $$(f,g) = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(\theta, s)\bar{g}(\theta, s)\, ds d\sigma(\theta)$$

   definiert.