# Übung zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 6, Abgabe bis 28.11.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *SVD 1:*
   Wir betrachten im folgenden den Integraloperator $K$ definiert durch
   $$(Kx)(s) = \int_0^s x(t)\ dt, \qquad s \in [0,1].$$
   Zeigen Sie
   (i) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$.
   (ii) Betrachten Sie $K$ als Operator von $H_0^1([0,1])$ nach $L^2([0,1])$, wobei $H_0^1([0,1])$ nur Funktionen $x$ mit $x(0) = x(1)$ enthält, und das Skalarprodukt in diesem Raum durch
   $$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_0^1 x_1'(t) x_2'(t)\ dt$$
   gegeben ist ($x'$ bezeichne die erste Ableitung von $x$). Berechnen Sie den Adjungierten Operator $K^* : L^2([0,1]) \to H_0^1([0,1])$ und die Singulärwertzerlegung von $K$ in diesen Räumen (**Zusatz: es genügt das Abfallverhalten der Singulärwerte zu bestimmen, betrachten sie also den Fall kleiner $\sigma_n$ und die entsprechende Asymptotik**).

2. *SVD von Integraloperatoren:*
   Verwenden Sie die Implementierung der Integraloperatoren aus Übung 5, Blatt 2, um numerisch die Singulärwertzerlegung (Matlab-Kommando svd) für die Kerne
   (i) $k(s,t) = e^{-st}$.
   (ii) $k(s,t) = \sin(2\pi st)$
   (iii) $k(s,t) = \max(s,t)$.
   zu berechnen. Plotten sie die Singulärwerte normal und logarithmisch und kommentieren sie das Abklingverhalten.

3. *SVD und Kompaktheit:*
   Sei $K : X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator mit einer Darstellung der Form
   $$Kx = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle x, u_j \rangle v_j, \tag{1}$$
   wobei $\{u_j\}$ und $\{v_j\}$ Orthonormalbasen von $X$ bzw. $Y$. Dabei sei $(\sigma_j)$ ein Folge positiver reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert. Zeigen Sie, dass $K$ kompakt ist.
   **Hinweis: Betrachten Sie für eine beschränkte Folge $x_k$ jeweils $\langle x_k, u_j \rangle$ als beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und basteln sie mit Diagonalfolgenargument eine passend konvergente Teilfolge**