Übung zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 5, Abgabe bis 21.11.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Integraloperatoren:*
   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Dann ist der Integraloperator $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit Kern k definiert durch
   $$(Kx)(s) = \int_\Omega k(s,t)x(t)\, dt, \qquad s \in \Omega.$$
   Zeigen Sie
   (i) Ist $k_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i(s)\psi_i(t)$ mit $\varphi_i \in L^2(\Omega)$, $\psi_i \in L^2(\Omega)$, so gilt für den Integraloperator K_n mit Kern k_n: $\dim \mathcal{R}(K_n) \leq n$, insbesondere ist K_n kompakt.
   (ii) Sei $k \in C^1(\Omega \times \Omega)$, und der Operator K_n mit dem Kern k_n definiert durch
   $$k_n(s,t) = \frac{1}{|\Omega_i^n|\ |\Omega_j^n|} \int_{\Omega_i^n \times \Omega_j^n} k(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau, \quad (s,t) \in \Omega_i \times \Omega_j, i,j = 1, \ldots, n$$
   Dabei sei $\Omega = \bigcup \Omega_i$, $\Omega_i^n \cap \Omega_j^n$ habe Maß null, und es sei $\operatorname{diam}(\Omega_i^n) \leq \frac{C}{n}$ mit einer Konstante C unabhängig von n. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}(K_n)$ endlichdimensional ist und dass $\|K - K_n\| \to 0$.

2. *Approximation von Integraloperatoren:*
   Implementieren Sie numerisch die Approximation eines Integraloperators aus Aufgabe 1 (ii) für $\Omega = [0,1]$ und $\Omega_{ij} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$. Testen sie die Approximation für einen Kern k und eine Funktion x ihrer Wahl für verschiedene Werte von n.

3. *Spektraleigenschaften:*
   Sei $K : X \to X$ ein kompakter und selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie:
   (i) $\sigma(K) \subset [-\|K\|, \|K\|]$.
   (ii) $\sigma(K) \cap \{-\|K\|, \|K\|\} \neq \emptyset$, d.h $\|K\|$ oder $-\|K\|$ ist Eigenwert.
   (iii) Sei K positiv semi-definit, d.h. $\langle Kx, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in X$. Dann gilt $\sigma(K) \subset [0, \|K\|]$,