Übung zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 4, Abgabe bis 14.11.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Inverse Probleme der Transportgleichung:*
   Wir betrachten im Folgenden zwei inverse Probleme für die Transportgleichung
   $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x), \qquad x, t \in \mathbb{R}_+,$$
   mit gegebenem Anfangswert $u(x,0) = u_0(x)$:

   (i) Identifikation des Quellterms $f(x)$ für $a > 0$ konstant aus der zusätzlichen Messung $u(0,t)$, $0 \leq t \leq T$.

   (ii) Identifikation der Geschwindigkeit $a(x)$ für $f \equiv 1$ aus der zusätzlichen Messung $u(0,t)$, $0 \leq t \leq T$.

   Benutzen Sie die Formel aus Blatt 3 um in den jeweiligen Fällen folgende Resulte zu zeigen:

   (i) Zeigen Sie, dass f im Intervall $[0, aT]$ eindeutig bestimmt ist und leiten Sie eine Lösungsformel her.

   (ii) Sei u_0 streng monoton. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 > 0$ (abhängig von T) gibt, sodass a im Intervall $[0, x_0]$ eindeutig bestimmt ist.

2. *Volatilitätsschätzung aus europäischen Optionen:*
   Wir betrachten das Problem der Schätzung der Volatilität $\sigma^2 > 0$ in der Black-Scholes Gleichung
   $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2(S,t)S^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS\frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0, \qquad 0 < t < T, S > 0$$
   mit der Endbedingung $u(S,T) = \max\{S - K, 0\}$. Die dabei zur Verfügung stehenden Daten sind die Beobachtungen $u(S_0, 0; T, K)$ von Lösungen der Black-Scholes Gleichung für beliebige Werte von $T > 0$ und $K > 0$. Zeigen Sie, dass σ^2 durch die Formel
   $$\sigma^2(K,T) = 2\frac{\frac{\partial u}{\partial T} + rK\frac{\partial u}{\partial K}}{K^2\frac{\partial^2 u}{\partial K^2}}$$
   berechnet werden kann.

3. *EKG-Messung:*
   Bei einer EKG-Messung klebt man einen Ring aus Elektroden um die Brust, sendet mit diesen kleine elektrische Ströme in den Körper, und misst das elektrische Potential. Dies lässt sich mathematisch vereinfacht (wenn man Körper und Herz als konzentrische Kreise ansetzt) durch die Lösung folgenden Problems modellieren
   $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{in } \{x \mid R_0 \leq x \leq R\}$$
   mit den Randbedingungen für Potential und Strom
   $$u(x) = f(x), \qquad \nabla u \cdot n = g \qquad \text{für } |x| = R.$$

In Polarkoordinaten lässt sich das Problem umschreiben zu

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \qquad R_0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

mit

$$u(R,\varphi)=F(\varphi), \qquad \frac{\partial u}{\partial r}=G(\varphi).$$

Berechnen Sie durch einen Ansatz der Form

$$u(R,\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty}(a_j(r)\sin(j\varphi)+b_j(r)\cos(j\varphi))$$

eine Lösung dieses Problems und insbesondere das Potential am Herz $u(R_0,\varphi)$. Interpretieren Sie das Ergebnis bezüglich der Fehlerverstärkung.