Übung zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 3, Abgabe bis 07.11.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Parameteridentifikation I:*
   Wir betrachten das Parameteridentifikationsproblem aus Abschnitt 2.4, d.h.
   $$\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) = f, \quad \text{ in } (0,1)$$
   mit den Randbedingungen $\frac{du}{dx}(0) = u(1) = 0$. Wir nehmen an, dass $a > 0$ überall in $[0,1]$ gilt und suchen $b := \frac{1}{a}$ als Unbekannte.
   (i) Leiten Sie eine Integralgleichung der Form
   $$(Ab)(y) := \int_0^1 k(x,y)b(y)\ dy = u(y)$$
   für b her.
   (ii) Berechnen Sie im L^2-Skalarprodukt den adjungierten Operator A^*, definiert durch
   $$\langle Au, v\rangle_L^2 = \langle u, A^*v\rangle_L^2, \qquad \forall\ u, v \in L^2.$$
   (iii) Sei für $\hat{u} = A\hat{b}$ die Folge (b^k) definiert durch die Fixpunktiteration (*Landweber-Iteration*)
   $$b^{k+1} = b^k - \tau A^*(Ab^k - \hat{u}).$$
   Zeigen Sie, dass für $\tau > 0$ hinreichend klein die Monotonieeigenschaften
   $$\|Ab^{k+1} - \hat{u}\|_{L^2} \leq \|Ab^k - \hat{u}\|_{L^2}$$
   und
   $$\|b^{k+1} - \hat{b}\|_{L^2} \leq \|b^k - \hat{b}\|_{L^2}$$
   erfüllt sind

2. *Parameteridentifikation II:*
   Implementieren Sie die Fixpunkt-Iteration
   $$b^{k+1} = b^k - \tau A^*(Ab^k - u),$$
   wobei sie den Integraloperator mit einer geeigneten Quadraturformel auf dem Gitter $x_i = ih$, $h = 10^{-3}$, $i = 0, \ldots, 10^3$, diskretisieren. Testen Sie das Verfahren f"ur den Fall
   $$f(x) = 1, \quad u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{6}, \quad b^0(x) = 0.$$
   Verwenden sie für u in drei Testläufen jeweils die exakte und die beiden verrauschten Versionen von der Homepage. Berechnen und plotten Sie den das Residuum $\|Ab^k - u\|_{L^2}$ und den L^2-Fehler $\|b^k - \hat{b}\|_{L^2}$ gegen die Iterationszahl k, wobei
   $$\hat{b} = 1 + x$$
   die exakte Lösung des Parameteridentifikationsproblems ist.

3. *Transportgleichung:*
   Wir betrachten im folgenden die Transportgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x), \qquad x, t \in \mathbb{R}_+,$$

   mit gegebenem Anfangswert $u(x,0) = u_0(x)$. Berechnen Sie mit der Charakteristikenmethode eine Formel für $u(0,t)$ in den folgenden beiden Fällen

   (i) $a > 0$ konstant .

   (ii) $f \equiv 0$, $a(x) > 0$.

   [Hinweis zur Charakteristikenmethode: Machen sie entlang passend gewählter Kurven $x = x(t)$ den Ansatz $z(t) = u(x(t), t)$ für die Lösung und reduzieren sie die Gleichung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.]