Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 2, Abgabe bis 31.10.2007, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Radon-Transformation*
Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine radiale Funktion (d.h. $f(x)$ hängt nur von $x_1^2 + x_2^2$ ab) und f verschwinde außerhalb eines Kreises um 0 mit Radius $R > 0$.

   (a) Bestimmen Sie die Radon-Transformation Rf von f.
   Hinweis: Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ist
   $$Rf(\theta, s) := \int_{x \cdot \theta = s} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(s\theta + t\theta^\perp)dt \ ,$$
   wo $\theta^\perp$ der orthogonale Vektor zu θ ist.

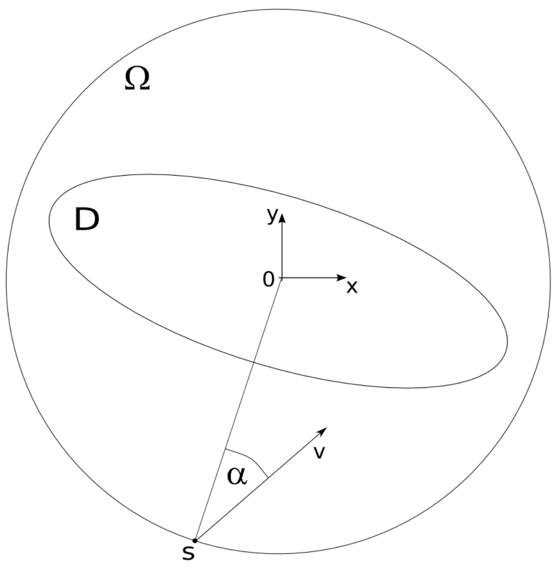
   (b) Bestimmen Sie in diesem Fall die Inverse der Radon-Transformation.
   Hinweis: Multiplizieren Sie beide Seiten der Integralgleichung aus (a) mit $s\,(s^2 - u)^{-1/2}$ und integrieren Sie nach s von $\sqrt{u}$ bis R, wobei $\sqrt{u} \leq R$ ist.

2. *Direktes Streuproblem*
Ein vereinfachtes Streuproblem kann durch folgende Geometrie beschrieben werden: Ein Störobjekt D befindet sich in einem Kreis Ω im $\mathbb{R}^2$. Die Impulssender (z.B. Ultraschall- oder Röntgenquellen) und die Detektoren sind an der Oberfläche des Kreises angebracht. Die Datenaufnahme erfolgt, indem die Impulse aus verschiedenen Richtungen auf das Störobjekt eingestrahlt werden, die am Rand von D reflektiert werden, und das gestreute Impulsfeld an den Detektoren aufgenommen wird. Das direkte Problem besteht darin, aus der Kenntnis des Störobjektes und der eingestrahlten Impulse das gestreute Impulsfeld zu berechnen.

   Betrachten Sie das direkte Streuproblem. Dafür sei Ω ein Kreis um 0 mit Radius $R > 0$, D ein konvexes Gebiet mit C^1-Rand und $0 \in D$, so dass $\overline{D} \subset \Omega$ ist. Nehmen Sie weiterhin an, dass der Hintergrund $\Omega \backslash \overline{D}$ ein homogenes Medium ist und dass die Impulse von äußeren Einflüssen nicht gestört und vollständig am Rand von D reflektiert werden. Beachten Sie bei der Reflexion zusätzlich, dass der Ausfallswinkel dem Einfallswinkel gleich ist.

   (a) Stellen Sie ein mathematisches Modell für das direkte Streuproblem auf.

   (b) Leiten Sie für eine gegebene Quelle $s \in \partial\Omega$ und eine einstrahlende Impulsrichtung $v \in S^1$ die notwendigen Gleichungen her, um die Impulstreffpunkte an den Rändern von D und Ω zu bestimmen.



3. *Programmieraufgabe*
Erstellen Sie ein Programm zum direkten Streuproblem.

(a) Programmieren Sie eine Funktion $dirscatt(\theta, \varphi, \alpha)$. Die Vektoren $\theta \in \mathbb{R}^q$ und $\varphi \in \mathbb{R}^p$ enthalten die Diskretisierungen der Ränder von Ω und D, der Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^{2w+1}$ gibt die einstrahlenden Impulsrichtungen vor. Dabei sind die θ_i und φ_k äquidistant in $[0, 2\pi]$ und die α_j sind äquidistant in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Der Rand von D wird durch einen Polygonzug approximiert.

$dirscatt$ führt das direkte Streuproblem für die gegebenen Daten durch und liefert eine Matrix d der Größe $q \times (2w+1)$, die im Eintrag d_{ij} den Detektorwinkel für die Quelle mit dem Winkel θ_i und der einstrahlenden Impulsrichtung α_j enthält.

(b) Testen Sie Ihr Programm an einem Kreis Ω mit Radius 3 und einer achsenparallelen Ellipse D mit den Halbachsen 1.5 und 1.0. Wählen Sie $q = 8,\ p = 100$ und $w = 4$.