# Übung zur Vorlesung Inverse Probleme

Übungsblatt 10, Abgabe bis 18.1.2008, 12 Uhr, Briefkasten 85

1. *Tikhonov-Regularisierung und Regularität:*
   Sei $M > 0$ und $A : L^2([0, M]) \to L^2([0, M])$ der Operator

   $$(Ax)(s) = \int_0^M e^{-st} x(t)\ dt.$$

   Zeigen Sie, dass die regularisierte Lösung aus Tikhonov-Regularisierung mit $\alpha > 0$ unendlich oft differenzierbar ist.

2. *Inverses Problem der Transportgleichung 1:*
   Wir betrachten im Folgenden zwei inverse Probleme für die Transportgleichung

   $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x, t \in [0,1],$$

   mit gegebenem Anfangswert $u(x, 0) = u_0(x)$ und Randwert $u(1, t) = 0$. Identifikation der Geschwindigkeit $a(x)$ aus der zusätzlichen Messung $u(0, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Formulieren sie dieses inverse Problem als nichtlineare Operatorgleichung für $a \in H^1([0, 1])$, sowie die entsprechende Tikhonov-Regularisierung. Berechnen sie mit Hilfe des Lagrange-Funktionals die Optimalitätsbedingung erster Ordnung für die Tikhonov-Regularisierung.

3. *Inverses Problem der Transportgleichung 2:*
   Implementieren sie ein Gradientenverfahren zur Lösung des inversen Problems aus 2. Benutzen sie dazu das Lagrange-Funktional, in dem sie nacheinander $u^{k+1}$, $p^{k+1}$ und $a^{k+1}$ aus den Gleichungen

   $$\partial_p L(u^{k+1}, a^k, p^k) = 0$$
   $$\partial_u L(u^{k+1}, a^k, p^{k+1}) = 0$$
   $$a^{k+1} = a^k - \tau^k \partial_a L(u^{k+1}, a^k, p^{k+1})$$

   berechnen. Zum Test des Verfahrens verwenden Sie den Anfangswert $u(x, 0) = x^3$ und die Daten $u(0, t) = (e^t - 1)^3$. Zur Diskretisierung der Transportgleichung und der adjungierten Gleichung für $p$ verwenden Sie ein Upwind-Finite-Differenzen Verfahren, d.h.

   $$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} a(x_i, t_j)(u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)).$$